Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Klausur

Arbeitszeit: 60 Minuten

02. Oktober 2026

Ruhr–Universität Bochum, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Axel Bücher und Dr. Nico Lorenz

Name:

Vorname:

Mit Antritt der Klausur erkläre ich mich für prüfungsfähig.

Matrikelnummer:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Gesamtpunkte	10	4	8	10	8	40
erreichte Punkte						

Hinweise:

- Schreiben Sie – *bevor Sie mit der Klausur beginnen* – auf jedes Blatt Ihren Namen und Vornamen.
- Überprüfen Sie – *bevor Sie mit der Klausur beginnen* – ob Ihr Ausdruck alle 5 Aufgaben und 5 Seiten (Seitenzahl unten rechts) enthält.
- Schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe direkt auf das Blatt mit der Aufgabenstellung. **Bei Bedarf Vorder- und Rückseite benutzen!**
- Trennen Sie die Blätter nicht auseinander.
- Benutzen Sie *keine Bleistifte* und *keine rotfarbigen Stifte*.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie Taschenrechner, Bücher, Skripte, Handys, Smartwatches, Notizzettel usw.) zugelassen.
- In den Klausuraufgaben können maximal 40 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur ist das Erreichen von 20 Punkten notwendig.
- Bei den Aufgaben 2 bis 5 sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben.
- Endergebnisse müssen stets in vollständig vereinfachter Form angegeben werden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (insgesamt 10 Punkte)
Bei jeder der folgenden Aufgaben ist *genau eine* der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie diese an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für eine falsche oder nicht angekreuzte Antwort erhalten Sie keinen Punkt.

1. Welche der folgenden Aussagen ist die Negation von

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 0?$$

(a) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 < 0$
(b) $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2 < 0$
(c) $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2 \geq 0$
(d) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 \leq 0$

2. Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Mengen ist gleich $A \setminus B$?
(a) $\{1\}$
(b) $\{4\}$
(c) $\{2, 3\}$
(d) $\{1, 4\}$

3. Welche der folgenden Aussagen über eine Verknüpfung $*$ auf einer Menge M beschreibt die Assoziativität?
(a) $a * b = b * a$ für alle $a, b \in M$
(b) $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in M$
(c) Es gibt ein $e \in M$ mit $a * e = a$ für alle $a \in M$
(d) Zu jedem $a \in M$ gibt es ein $b \in M$ mit $a * b = e$

4. Welche Lösungsmenge besitzt die Ungleichung $|x - 2| < 3$?
(a) $(-1, 5)$
(b) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$
(c) $[-1, 5]$
(d) $(-3, 3)$

5. Welche der folgenden Aussagen ist für jede natürliche Zahl $n > 2$ richtig?
(a) n lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Summe von Primzahlen darstellen.
(b) n lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.
(c) Der kleinste positive Teiler von n ist eine Primzahl.
(d) Der größte von n verschiedene positive Teiler von n ist eine Primzahl.

6. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Welche Aussage ist richtig?

(a) f ist injektiv und surjektiv.
(b) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
(d) f ist weder injektiv noch surjektiv.

7. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte von AB?

(a) 2
(b) 3
(c) 6
(d) 8

8. Welche der folgenden Aussagen gilt für jedes reelle Polynom vom Grad d, das genau n verschiedene reelle Nullstellen hat?

(a) $d \neq n$
(b) $d \leq n$
(c) $d = n$
(d) $d \geq n$

9. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x^2)$. Welche Ableitung ist korrekt?

(a) $f'(x) = \cos(x^2)$
(b) $f'(x) = 2x \sin(x^2)$
(c) $f'(x) = 2x \cos(x^2)$
(d) $f'(x) = \cos(2x)$

10. Es sei $z = 1 + i \in \mathbb{C}$. Welche Aussage ist richtig?

(a) $|z| = 1$
(b) $|z| = 2$
(c) $|z| = \sqrt{2}$
(d) $|z| = 1 + i$

Aufgabe 2 (insgesamt 4 Punkte)
Es seien A, B, C Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$A \cap (B \cup C) \subseteq C.$$

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte)
Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mithilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie die Konvergenz direkt anhand der Definition, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ bestimmen, sodass

$$|a_n - 3| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt. (5 Punkte)

Aufgabe 4 (insgesamt 10 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x \log(x) - x.$$

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

Hinweis: Falls Sie in Teil (a) keine verwendbare Ableitung erhalten haben, führen Sie Teil (b) ersatzweise unter der Annahme

$$f'(x) = 1 - \log(x)$$

durch.

(c) Bestimmen Sie alle $x > 0$ mit

$$\log(x) + \log(x+2) = \log(3).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Name: Vorname: Punkte:

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Musterlösung zur Klausur

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Jeweils ein Punkt für die richtige Antwort.

1. (b). Die Negation von $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 0$ ist

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 0.$$

2. (a). Es gilt

$$A \setminus B = \{1\}.$$

3. (b). Assoziativität bedeutet

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \text{für alle } a, b, c \in M.$$

4. (a). Aus

$$|x - 2| < 3$$

folgt

$$-3 < x - 2 < 3,$$

also $-1 < x < 5$. Die Lösungsmenge ist $(-1, 5)$.

5. (b). Nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik besitzt jede natürliche Zahl $n > 1$ bis auf die Reihenfolge eine eindeutige Primfaktorzerlegung.

6. (d). Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da etwa $f(1) = f(-1)$, und nicht surjektiv als Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da sie keine negativen Werte annimmt.

7. (c). Für den Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte gilt

$$(AB)_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6.$$

8. (d). Ein Polynom vom Grad d besitzt höchstens d verschiedene reelle Nullstellen. Daher gilt $n \leq d$, also $d \geq n$.

9. (c). Mit der Kettenregel erhält man

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2).$$

10. (c). Es gilt

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann gilt

$$x \in A \qquad \text{und} \qquad x \in B \cup C.$$

Insbesondere ist $x \in B$ oder $x \in C$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ und $x \in A$ kann x nicht in B liegen. Folglich gilt $x \in C$. Damit ist gezeigt, dass

$$A \cap (B \cup C) \subseteq C.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben ist

$$a_n = \frac{3n+1}{n+2}.$$

(a) Durch Division von Zähler und Nenner durch n erhält man

$$a_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}.$$

Wegen $1/n \to 0$ und $2/n \to 0$ und den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3+0}{1+0} = 3.$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$|a_n - 3| = \left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| = \left|\frac{-5}{n+2}\right| = \frac{5}{n+2}.$$

Wir benötigen also

$$\frac{5}{n+2} < \varepsilon.$$

Dies ist äquivalent zu

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 2.$$

Wähle beispielsweise

$$N = \left\lfloor \frac{5}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Dann gilt für jedes $n \geq N$ insbesondere $n > 5/\varepsilon - 2$ und somit

$$|a_n - 3| = \frac{5}{n+2} < \varepsilon.$$

Nach der Definition der Konvergenz folgt daher $a_n \to 3$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x\log(x) - x, \qquad x > 0.$$

(a) Mit der Produktregel gilt

$$f'(x) = \log(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \log(x).$$

(b) Da f differenzierbar ist, erfüllen mögliche Extremstellen die Gleichung

$$f'(x) = \log(x) = 0,$$

und die einzige Lösung ist $x = 1$. Für $0 < x < 1$ gilt $\log(x) < 0$, während für $x > 1$ gilt $\log(x) > 0$. Somit ist f links von 1 streng fallend und rechts von 1 streng wachsend. Daher besitzt f bei

$$\boxed{x = 1}$$

ein lokales Minimum. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(1) = 1 \cdot \log(1) - 1 = -1.$$

Bewertung bei Verwendung des Hinweises: Wird ersatzweise wie in der Aufgabenstellung vorgegeben $f'(x) = 1 - \log(x)$ angenommen, so ergibt sich

$$1 - \log(x) = 0 \iff x = e.$$

Unter dieser Annahme ist die Ableitung für $0 < x < e$ positiv und für $x > e$ negativ; entsprechend ist unter der vorgegebenen Ersatzannahme $x = e$ als lokale Maximumstelle zu folgern.

(c) Für $x > 0$ sind sowohl x als auch $x + 2$ positiv. Mit dem Logarithmengesetz erhält man

$$\log(x) + \log(x + 2) = \log(x(x + 2)).$$

Da der Logarithmus injektiv ist, folgt

$$x(x + 2) = 3.$$

Also

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x - 1)(x + 3) = 0.$$

Die beiden algebraischen Lösungen sind $x = 1$ und $x = -3$. Wegen $x > 0$ bleibt nur

$$\boxed{x = 1}.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Zu zeigen ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

und

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2.$$

Die Behauptung gilt also für $n = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig, und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Induktionsschritt: Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Dies ist genau die behauptete Formel mit n durch $n+1$ ersetzt. Damit gilt die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.