Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabe 8.1

Gegeben seien

$$z = 2 - i \qquad \text{und} \qquad w = 1 + 2i.$$

(a) Berechnen Sie

$$z + w, \qquad zw, \qquad \frac{z}{w}.$$

(b) Bestimmen Sie $\overline{z}$, $\overline{w}$, $|z|$ und $|w|$.

(c) Berechnen Sie z^{-1} und überprüfen Sie durch Multiplikation, dass tatsächlich

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

gilt.

(d) Überprüfen Sie für die gegebenen Zahlen direkt die Identität

$$|zw| = |z|\,|w|.$$

Präsenzaufgabe 8.2

Gegeben seien

$$z = \sqrt{3} + i \qquad \text{und} \qquad w = 1 - i.$$

(a) Bestimmen Sie Betrag und ein Argument von z und w und schreiben Sie beide Zahlen in Polardarstellung. Nutzen Sie Aufgabe 7.4.

(b) Berechnen Sie das Produkt zw mithilfe der Polardarstellung. Geben Sie das Ergebnis in der Form $a + ib$ an.

(c) Berechnen Sie z^6 mithilfe der Euler-Formel, ohne die Potenz durch wiederholtes Ausmultiplizieren zu bestimmen.

Präsenzaufgabe 8.3

(a) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\log\left(\frac{e^3\sqrt{e}}{e^{-2}}\right).$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$e^{2x-1} = 5.$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$\log(x) + \log(x-2) = \log(3)$$

gilt. Beachten Sie dabei zunächst, für welche x die Gleichung überhaupt definiert ist.

(d) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

erfüllen. Substituieren Sie dazu $y = 2^x$, und lösen zunächst nach y auf.

(e) Zeigen Sie für $a, b > 0$, dass

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b).$$

Präsenzaufgabe 8.4

Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty), \qquad f(x) = x^x.$$

(a) Schreiben Sie $f(x)$ mithilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus in der Form

$$f(x) = \exp(g(x))$$

für eine geeignete Funktion g.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$.

(c) Bestimmen Sie alle Stellen, an denen $f'(x) = 0$ gilt.

(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie das Minimum von f.