Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabe 7.1

Ein Freizeitpark verlangt für eine Sonderveranstaltung einen Eintrittspreis von 20 Euro und rechnet bei diesem Preis mit 1000 Besuchern. Aus früheren Erfahrungen wird geschätzt, dass eine Erhöhung des Eintrittspreises um einen Euro zu durchschnittlich 25 Besuchern weniger führt.

(a) Stellen Sie eine Funktion $E(p)$ auf, welche die erwarteten Einnahmen in Abhängigkeit vom Eintrittspreis p beschreibt.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Differentialrechnung den Eintrittspreis, für den die erwarteten Einnahmen maximal sind.

(c) Wie hoch sind die maximalen erwarteten Einnahmen und mit wie vielen Besuchern ist bei diesem Eintrittspreis zu rechnen?

Präsenzaufgabe 7.2

(a) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x},$$

in jedem $x_0 > 0$ differenzierbar ist und

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

gilt. Verwenden Sie einen ähnlichen Trick wie in Beispiel 11.16.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_j : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sqrt{1 + x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad f_3(x) = (2 + \sqrt{x})^4.$$

Präsenzaufgabe 7.3

Leiten Sie die Quotientenregel aus der Produktregel und der Kettenregel her.

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$r : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{1}{x}.$$

Zeigen Sie direkt mit der Definition der Ableitung, dass

$$r'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0.$$

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit $g(x_0) \neq 0$. Verwenden Sie die Kettenregel, um zu zeigen, dass

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Schreiben Sie

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

und verwenden Sie die Produktregel sowie Teil (b), um die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

herzuleiten.

Präsenzaufgabe 7.4

(a) Bestimmen Sie die Werte

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

mithilfe eines gleichseitigen Dreiecks. Gehen Sie dazu von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 2 aus und zerlegen Sie dieses durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke. Bestimmen Sie zunächst mithilfe des Satzes von Pythagoras die Länge der Höhe.

(b) Bestimmen Sie auf ähnliche Weise mithilfe eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks die Werte

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{und} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Präsenzaufgabe 7.5

In dieser Aufgabe soll das Additionstheorem

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

mithilfe der Differentialrechnung bewiesen werden. Fixieren Sie dazu $y \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f''(x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und dass

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

(b) Definieren Sie

$$g(x) = f(x)^2 + f'(x)^2.$$

Zeigen Sie, dass $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass aus $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass g konstant ist. Folgern Sie daraus sowie aus (a) und (b), dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und beweisen Sie damit das Additionstheorem des Cosinus.