Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik — Probeklausur

In der Probeklausur sind wie in der Hauptklausur 40 Punkte zu erzielen, davon 10 Punkte im Rahmen der Multiple Choice Aufgabe 1. Zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bei jeder der folgenden Aufgaben ist *genau eine* der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie diese an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Für eine falsche oder nicht angekreuzte Antwort erhalten Sie keinen Punkt.

1. Welche der folgenden Aussagen ist die Negation von

$$\exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 2?$$

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 \neq 2$
(b) $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 \neq 2$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 2$
(d) $\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 2$

2. Es seien

$$A = \{1, 2, 4\}, \qquad B = \{2, 3, 4\}.$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich $A \cap B$?

(a) $\{1, 3\}$
(b) $\{2, 4\}$
(c) $\{1, 2, 3, 4\}$
(d) $\{1\}$

3. Welche der folgenden Aussagen ist für jede Primzahl p richtig?

(a) p ist ungerade.
(b) p besitzt genau zwei positive Teiler.
(c) $p + 2$ ist eine Primzahl.
(d) p ist durch 2 teilbar.

4. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2x - 1.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) f ist injektiv und surjektiv.
(b) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
(d) f ist weder injektiv noch surjektiv.

5. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Eintrag in der ersten Zeile und zweiten Spalte von AB?

(a) -2
(b) -1
(c) 1
(d) 3

6. Welche der folgenden Aussagen über ein reelles Polynom vom Grad 4 ist immer richtig?

(a) Es besitzt genau vier reelle Nullstellen.
(b) Es besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.
(c) Es besitzt höchstens vier verschiedene reelle Nullstellen.
(d) Es besitzt keine reelle Nullstelle.

7. Es sei

$$z = 1 - i \in \mathbb{C}.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) $\bar{z} = \sqrt{2}$
(b) $\bar{z} = -1 + i$
(c) $\bar{z} = 1 + i$
(d) $\bar{z} = 0$

8. Welche der folgenden Aussagen beschreibt den Induktionsschritt zum Beweis einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion?

(a) Man zeigt $A(1) \Rightarrow A(2)$.
(b) Man zeigt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$: Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.
(c) Man zeigt $A(n+1)$ unter der Voraussetzung $A(1)$.
(d) Man zeigt: Aus "$A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$" folgt "$A(n+1)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$".

9. Welche der folgenden Folgen konvergiert gegen 0?

(a) $a_n = 1904 \cdot (-1)^n$
(b) $a_n = \dfrac{1904}{n}$
(c) $a_n = 1904 \cdot n$
(d) $a_n = 1904 + \dfrac{1}{n}$

10. Es sei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log(x^2 + 1).$$

Welche Ableitung ist korrekt?

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

(c) $f'(x) = 2x\log(x^2+1)$

(d) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

Aufgabe 2 (6=4+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist

$$n^2 - 1$$

durch 8 teilbar.

(b) Ist die Umkehrung der Aussage aus (a) ebenfalls richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (6=2+2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) Bestimmen Sie mithilfe von (b) die Polardarstellung der komplexen Zahl

$$w = 1 + i.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgenden aus der Vorlesung bekannten Beziehungen verwenden:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y), \\ 1 &= \sin^2(x) + \cos^2(x), \\ \sin(x), \cos(x) \geq 0 &\qquad \text{für alle } x \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10=2+5+3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 e^{-x}.$$

(a) Bestimmen Sie $f'(x)$.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Falls Sie in Teil (a) keine verwendbare Ableitung erhalten haben, führen Sie Teil (b) ersatzweise unter der Annahme

$$f'(x) = x(3-x)e^{-x}$$

durch.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x \neq 0$

$$\frac{f(-x/2)}{f(x/2)} = e^x.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k\, 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$