Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabe 6.1

Eine natürliche Zahl n heißt *Chicken-Nugget-Zahl*, wenn es nichtnegative ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$n = 6a + 9b + 20c.$$

Eine solche Darstellung heißt *eindeutig*, wenn es genau ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}_0^3$ mit dieser Eigenschaft gibt.

(a) Zeigen Sie, dass 43 keine Chicken-Nugget-Zahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl $n \geq 44$ eine Chicken-Nugget-Zahl ist.

(c) Zeigen Sie, dass 61 die größte Chicken-Nugget-Zahl ist, die eine eindeutige Darstellung besitzt.

Präsenzaufgabe 6.2

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n+4}{n+3}.$$

(a) Berechnen Sie a_{10}, a_{100} und a_{1000}. Welchen Grenzwert vermuten Sie?

(b) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2,$$

indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ bestimmen, sodass

$$|a_n - 2| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt. Welches N ergibt sich für $\varepsilon = 0{,}01$?

Präsenzaufgabe 6.3

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz, dass dann auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

gilt.

Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$. Verwenden Sie die Konvergenz von (a_n) und (c_n), um geeignete $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zu finden, und betrachten Sie anschließend $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Präsenzaufgabe 6.4

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$a_n = \frac{2n+3}{5n+1}, \qquad b_n = \frac{n^2}{n+1}, \qquad c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad d_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Präsenzaufgabe 6.5

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder und stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert der Folge auf.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(d) Begründen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(e) Finden Sie eine explizite Formel für a_n.