

Vorkurs: Logik für die Informatik

Wintersemester 2026/2027

Thomas Zeume

Logik in der Informatik: Formale Verifikation



iPhone 4

- Aus einer Pressemeldung von 2013
[\[heise.de\]](http://heise.de)

- Um auf die Kontaktliste eines gesperrten iPhones zuzugreifen, konnte man
 - es einschalten,
 - den „Entsperren“-Slider nach rechts ziehen,
 - auf „Notruf“ tippen,
 - auf den Ausschalt-Knopf drücken, bis die Ausschalt-Option angezeigt wird,
 - „Abbrechen“ klicken,
 - eine Notrufnummer wählen, verbinden und sofort wieder auflegen,
 - das Gerät aus- und einschalten,
 - den „Entsperren“-Slider ziehen,
 - den Ausschaltknopf gedrückt halten,
 - kurz bevor die Ausschalt-Option angezeigt wird, auf „Notruf“ drücken

Oh nein!

- Die Kontakte öffneten sich und blieben geöffnet, solange der Ausschaltknopf gedrückt bleibt

Logik in der Informatik: Formale Verifikation

Frage

Wie lässt sich überprüfen, ob ein System eine Eigenschaft hat?

- Klassische Methode zum Finden von Bugs:
Testen! Testen! Testen!
- **Problem:** in der Regel zu viele mögliche Eingaben, um alle zu testen

• Besser: Formale Verifikation

- Formale Korrektheitsbeweise für Soft- und Hardware
- Möglichst: Automatisiert
- Grundlegendes algorithmisches Problem:
 - **Gegeben:** Ein System S und eine Eigenschaft E
 - **Frage:** Wie lässt sich automatisch überprüfen, ob S die Eigenschaft E hat?

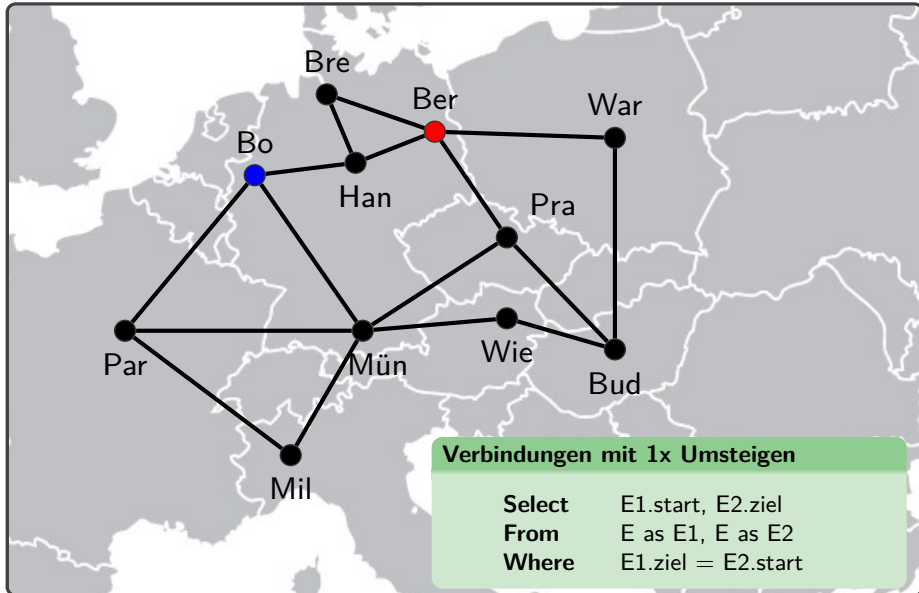
• Grundidee:

- Formalisiere die Eigenschaft durch eine logische Formel φ
- Modelliere das System durch ein formales Modell M
- Überprüfe, ob das formale Modell M die Formel φ erfüllt

• Passende Logik:

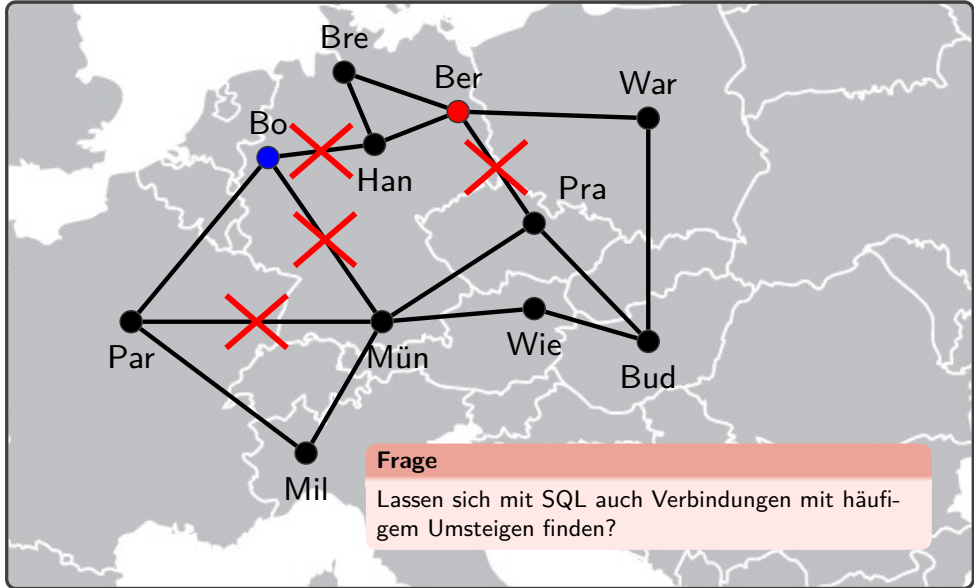
Temporallogik

Logik in der Informatik: Datenbanken

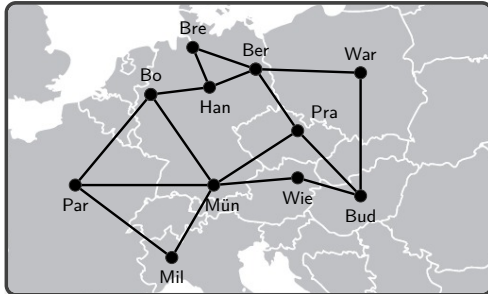


Streik!

Logik in der Informatik: Datenbanken



Logik in der Informatik: Datenbanken



Erreichbarkeitsanfrage

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$
Gesucht: Alle Paare $(x, y) \in V \times V$,
 sodass es einen Weg von x
 nach y in G gibt

Frage

Lässt sich die Erreichbarkeitsanfrage in
 (Kern-)SQL ausdrücken?

- **Kern-SQL:** Kein Grouping, keine Aggregation, keine Rekursion

- **Idee:** Beantwortung der Frage mit **logischen Methoden**

Fragestellung



Übersetzung in logische Fragestellung



Lösung mit Methoden der Logik



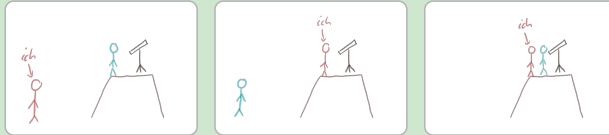
Rückübertragung der Lösung

- Passende Logik:
Prädikatenlogik (kurz: FO)

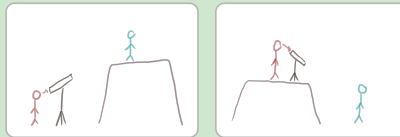
Gründe für Formale Logik: Präzision

Beispiel: Mehrdeutigkeit der Umgangssprache

- „Ich sah den Mann auf dem Berg mit dem Teleskop“
- Es gibt mindestens folgende Interpretationen dieses Satzes:
 - „... Berg mit dem Teleskop“:



- „Ich sah... mit dem Teleskop“:



 Idee zu diesen drei Folien: Foliensatz von Prof. Kastens, Paderborn

Gründe für formale Logik: Struktur von Zusammenhängen

Eine schlüssige Überlegung

- Wenn der Zug zu spät kommt und keine Taxis am Bahnhof sind, kommt Jane zu spät zu ihrem Termin
- Der Zug ist zu spät
- Aber Jane ist pünktlich

⇒ Also sind Taxis am Bahnhof

Noch eine schlüssige Überlegung

- Falls es regnet und John seinen Schirm nicht dabei hat, wird er nass
- Es regnet
- Aber John wird nicht nass

⇒ Also hat er seinen Schirm dabei

📖 Beispiele aus [HR]

- Die beiden Beispiele sind sehr ähnlich

- In beiden Fällen haben wir es mit 3 elementaren Aussagen zu tun:

(1)	Der Zug ist zu spät	Es regnet
(2)	Es sind Taxis am Bahnhof	John hat seinen Schirm dabei
(3)	Jane kommt zu spät	John wird nass

- Die Struktur der Argumentation ist jeweils gleich:
 - Falls (1) gilt und (2) nicht gilt, so gilt (3)
 - (1) gilt
 - (3) gilt nicht
 ⇒ Also gilt (2)

• Beobachtung:

- Die Argumentation ist unabhängig vom Inhalt der Aussagen (1) – (3)
- Es kommt nur auf den logischen Zusammenhang zwischen den Aussagen an

Gründe für formale Logik: Problemlösen



Eine typische Logelei

- **Anna:** „Jan oder ich werden zur Party gehen“
- **Jan:** „Entweder Patrick oder ich werden zur Party gehen“
- **Patrick:** „Entweder Anna oder ich werden zuhause bleiben“
 $\Rightarrow$ D.h. Anna bleibt genau dann zuhause, wenn ich nicht zuhause bleibe.

- Wer geht zur Party?

- Wir kürzen ab:
 - A steht für „Anna wird zur Party gehen“
 - P steht für „Patrick wird zur Party gehen“
 - J steht für „Jan wird zur Party gehen“

- Es ergibt sich die Formel:

$$(J \vee A) \wedge (P \leftrightarrow \neg J) \wedge (\neg A \leftrightarrow \neg \neg P)$$

- Durchgehen aller Wahrheitsbelegungen: Nur **eine** Wahrheitsbelegung macht die Formel wahr:

$$P \mapsto \text{falsch}$$

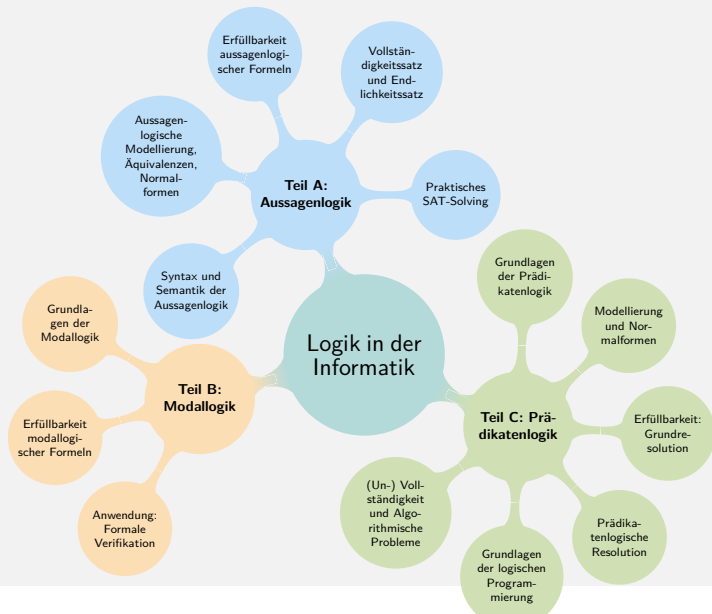
$$J \mapsto \text{wahr}$$

$$A \mapsto \text{wahr}$$

- Das bedeutet: Wenn alle drei die Wahrheit gesagt haben, werden Jan und Anna zur Party gehen, und Patrick zuhause bleiben

- **Beobachtung:** Die logische Formalisierung erlaubt die Anwendung systematischer Methoden zur Lösung von Problemen

Logik in der Informatik: Vorlesungsüberblick



Inhalt

1. Syntax und Semantik der Aussagenlogik
2. Von natürlicher Sprache zu Formeln

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Aussagen und Aussagenvariablen

- Aussagenlogik ist die **Logik der Aussagen**
- **Was ist eine Aussage?**

- **Beispiele für Aussagen:**

- Der Zug ist pünktlich.
- Alle Marsianer lieben Pizza.
- Der BVB wird Champions League Sieger der Saison 2026/2027.
- Der VFL steigt 2027 auf.
- Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.

- **Keine Aussagen sind:**

- Geben Sie mir mal das Salz, bitte?
- Alles Gute!
- Möge das bessere Team gewinnen!

- Was unterscheidet Aussagen von anderen Sätzen?

➔ Aussagen können wahr oder falsch sein

- Gemäß dieser Erkenntnis wählen wir unsere **Abstraktion** von Aussagen:

etwas, das wahr oder falsch sein kann

- Statt sprachlicher Aussagen verwenden wir **Variablen**, die die Werte **wahr** oder **falsch** annehmen können
- Solche Variablen nennen wir dann **Aussagenvariablen**

Aussagenlogik: Syntax

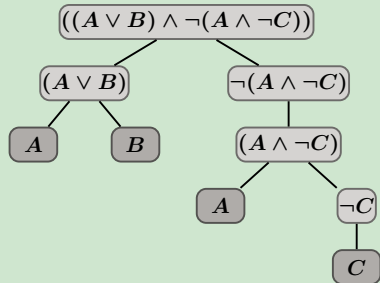
- Wir verwenden **aussagenlogische Variablen**
 - $A, B, C, \dots$
 - A_i , für alle $i \in \mathbb{N}$ und weitere, wenn nötig
- AV** bezeichne die Menge aller aussagenlogischen Variablen

Definition: Syntax aussagenlogischer Formeln

- Die Menge **AL** der **aussagenlogischen Formeln** ist die kleinste Menge, die die folgenden Eigenschaften hat:
 - $\top$ und $\perp$ sind in AL (**wahr** und **falsch**)
 - Jede Variable aus AV ist in AL
 - Sind φ_1 und φ_2 in AL, so auch
 - $\neg\varphi_1$, (**Negation**)
 - $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, (**Konjunktion**)
 - $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, (**Disjunktion**)
- Formeln der Typen (1) und (2) nennen wir **atomar**

Beispiel

- $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$ ist eine aussagenlogische Formel, denn



- Keine aussagenlogischen Formeln:
 - $A \wedge \neg B$
 - $A \wedge B \vee C$

Aussagenlogik: Semantik (1/3)

- Bisher haben wir nur definiert, wie aussagenlogische Formeln aussehen:

Syntax aussagenlogischer Formeln

- Jetzt definieren wir, was sie bedeuten:

Semantik aussagenlogischer Formeln

- Was soll beispielsweise die Bedeutung der Formel

$$\varphi = ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$$

sein?

- **Ansatz:** Wenn jeder vorkommenden Variable ein Wahrheitswert zugewiesen ist, dann kann auch einer aussagenlogischen Formel ihr Wahrheitswert zugewiesen werden

Definition: Wahrheitsbelegung

- Eine Wahrheitsbelegung ist eine partielle Funktion $\alpha : AV \rightarrow \{0, 1\}$
- Eine Belegung α heißt passend für eine Formel φ , wenn $\alpha(X)$ für alle in φ vorkommenden Variablen X definiert ist

- Partielle Funktion: Nicht jeder Variablen aus AV muss ein Wert zugewiesen werden

- Aussprache der griechischen Buchstaben:

- φ, Φ : „Phi“
- ψ, Ψ : „Psi“
- χ : „Chi“
- α : „Alpha“
- β : „Beta“

Aussagenlogik: Semantik (2/3)

- Die Semantik von φ ordnet jeder passenden Belegung α einen Wahrheitswert $\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha$ zu

Definition: Semantik aussagenlogischer Formeln

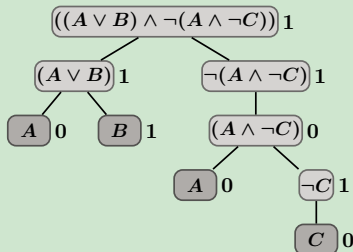
- Sei $\varphi \in \text{AL}$ und α eine zu φ passende Belegung
- Wir definieren $\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha$ induktiv nach der Struktur von φ :
 - $\llbracket \perp \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $\llbracket \top \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 1$
 - $\llbracket X \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(X)$ für Variablen $X \in \text{AV}$
 - $\llbracket \neg \varphi_1 \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket \varphi_1 \rrbracket_\alpha = 0 \\ 0 & \text{falls } \llbracket \varphi_1 \rrbracket_\alpha = 1 \end{cases}$
 - $\llbracket (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket \varphi_1 \rrbracket_\alpha = 1 \text{ und } \llbracket \varphi_2 \rrbracket_\alpha = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$
 - $\llbracket (\varphi_1 \vee \varphi_2) \rrbracket_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } \llbracket \varphi_1 \rrbracket_\alpha = 1 \text{ oder } \llbracket \varphi_2 \rrbracket_\alpha = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$
 - α erfüllt φ , falls $\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha = 1$ Schreibweise: $\alpha \models \varphi$

Aussagenlogik: Semantik (3/3)

Beispiel

- Sei φ die Formel $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$
- Sei die Belegung α wie folgt gegeben:
 - $\alpha(A) = 0$
 - $\alpha(B) = 1$
 - $\alpha(C) = 0$

- Induktive Auswertung von φ für α :



- In formaler Notation:

- $\llbracket B \rrbracket_\alpha = 1$
- $\llbracket A \rrbracket_\alpha = \llbracket C \rrbracket_\alpha = 0$
- $\llbracket \neg C \rrbracket_\alpha = 1$
- $\llbracket (A \vee B) \rrbracket_\alpha = 1$
- $\llbracket (A \wedge \neg C) \rrbracket_\alpha = 0$
- $\llbracket \neg(A \wedge \neg C) \rrbracket_\alpha = 1$
- $\llbracket ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C)) \rrbracket_\alpha = 1$

- Also: $\alpha \models ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$

Wahrheitstabellen am Beispiel



Beispiel

- Sei φ wieder die Formel $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$
- Dann ist die Semantik von φ durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Jede Zeile der Wahrheitstabelle entspricht also genau einer Belegung α der Variablen von φ

✎ Künftig werden wir in Tabellenköpfen oft statt „ $\alpha(X)$ “ und „ $\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha$ “ nur „ X “ und „ φ “ schreiben

Von natürlicher Sprache zu Formeln

Modellierung mit Aussagenlogik: Erstes Beispiel

Beispiel

[Grohe, RWTH Aachen]

- „Das Fluchtauto war rot oder grün und hatte weder vorne noch hinten ein Nummernschild“

- Elementare Aussagen:

R: Das Fluchtauto war rot

G: Das Fluchtauto war grün

V: Das Fluchtauto hatte vorne ein Nummernschild

H: Das Fluchtauto hatte hinten ein Nummernschild

- Gesamtaussage:

$$(R \vee G) \wedge (\neg V \wedge \neg H)$$

Rezept: Modellierung mit aussagenlogischen Formeln

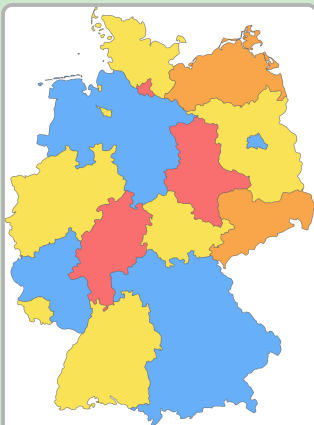
- (1) Bestimmen der benötigten aussagenlogischen Variablen und ihrer intendierten Bedeutung
- (2) Aufstellen der aussagenlogischen Formel

 Wählt “sprechende” Namen für die Variablen!

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (1/3)



Landkartenfärbung



Creative Commons (CC BY-SA 2.0 DE)
Urheber: (DeStatis); David Liuzzo.
Färbung: Gaetano Geck

- **Landkartenfärbung:** Die Bundesländer Deutschlands lassen sich mit vier Farben so färben, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben

➔ Wir sagen: Es gibt eine **zulässige 4-Färbung**

- **Frage:** Gibt es auch eine zulässige **3-Färbung**?

- **Lösungsansatz 1:** Probieren + Denken

➔ Ansatz ist fehleranfällig, langsam

- **Lösungsansatz 2:** Aussagenlogik

(1) Konstruiere eine Formel φ sodass

φ hat eine erfüllende Belegung

$\Leftrightarrow$ es gibt eine zulässige **3-Färbung** der Karte

➔ Erfüllende Belegungen sollen zulässigen **3-Färbungen** entsprechen

(2) Überprüfe, ob φ eine erfüllende Belegung hat

➔ Ansatz leicht auf andere Karten übertragbar

- **Hier:** Lösungsansatz 2

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (2/3)

- Unsere Farben:
rot, blau und gelb

- Aussagenlogische Variablen: eine für jedes Bundesland und jede Farbe

- R_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe rot“
- B_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe blau“
- Y_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe gelb“
- usw.

- Unsere Formel muss sicherstellen:
 1. Jedes Bundesland wird mit genau einer Farbe gefärbt
 2. Zwei benachbarte Bundesländer werden nicht gleich gefärbt

- Jedes Bundesland, wie bspw. NRW, hat genau eine Farbe:

- NRW wird mit mindestens einer Farbe gefärbt:

$$\varphi_{\text{NRW}}^{\geq 1} \stackrel{\text{def}}{=} Y_{\text{NRW}} \vee R_{\text{NRW}} \vee B_{\text{NRW}}$$

- NRW wird mit höchstens einer Farbe gefärbt:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{NRW}}^{\leq 1} \stackrel{\text{def}}{=} & \neg(Y_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{NRW}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{NRW}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge Y_{\text{NRW}}) \end{aligned}$$

- NRW hat genau eine Farbe:

$$\varphi_{\text{NRW}}^{\equiv 1} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\text{NRW}}^{\geq 1} \wedge \varphi_{\text{NRW}}^{\leq 1}$$

- Benachbarte Länder wie NRW und Hessen haben nicht dieselbe Farbe:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{NRW,HS}}^{\neq} \stackrel{\text{def}}{=} & \neg(Y_{\text{NRW}} \wedge Y_{\text{HS}}) \\ & \wedge \neg(R_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{HS}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge B_{\text{HS}}) \end{aligned}$$

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (3/3)

- Insgesamt erhalten wir die Formel:

$$\begin{aligned} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} & \varphi_{\text{NRW}}^=1 \wedge \varphi_{\text{BW}}^=1 \wedge \varphi_{\text{BY}}^=1 \wedge \varphi_{\text{RP}}^=1 \wedge \varphi_{\text{SR}}^=1 \wedge \varphi_{\text{HS}}^=1 \wedge \varphi_{\text{TH}}^=1 \wedge \varphi_{\text{SX}}^=1 \\ & \wedge \varphi_{\text{NI}}^=1 \wedge \varphi_{\text{SA}}^=1 \wedge \varphi_{\text{BR}}^=1 \wedge \varphi_{\text{B}}^=1 \wedge \varphi_{\text{HH}}^=1 \wedge \varphi_{\text{HB}}^=1 \wedge \varphi_{\text{MV}}^=1 \wedge \varphi_{\text{SH}}^=1 \\ & \wedge \varphi_{\text{NRW,HS}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BW,BY}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BW,RL}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BW,HS}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BY,HS}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BY,TH}}^{\neq} \\ & \wedge \varphi_{\text{BY,SX}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{SR,RL}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{RL,HS}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{RL,NRW}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{HS,TH}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{HS,NI}}^{\neq} \\ & \wedge \varphi_{\text{TH,SX}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{TH,SA}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{TH,NI}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{SX,BR}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{SX,SA}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NRW,NI}}^{\neq} \\ & \wedge \varphi_{\text{NI,SH}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NI,HB}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NI,HH}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NI,MV}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NI,SA}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{NI,BR}}^{\neq} \\ & \wedge \varphi_{\text{SA,BR}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BR,MV}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{BR,B}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{SH,HH}}^{\neq} \wedge \varphi_{\text{SH,MV}}^{\neq} \end{aligned}$$

- Dies ist eine Abkürzung für eine Konjunktion von über 150 Teilformeln
- **Es gilt:** Die Deutschland-Karte hat eine zulässige **3-Färbung**
 $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Wahrheitsbelegung, die φ wahr macht
- **Frage:** Wie lässt sich herausfinden, ob diese Formel (un-)erfüllbar ist?
- **Naïv:** Wahrheitstabelle mit $2^{3 \cdot 16}$ Zeilen
- **Besser: Veranstaltung “Logik für die Informatik”**

Zusammenfassung

- **In diesem Vorlesungskapitel haben wir gesehen:**
 - Gründe für die Formalisierung mit Logiken
 - Syntax und Semantik der Aussagenlogik
 - Wahrheitstabellen
 - Modellierung mit Aussagenlogik
- Dieser Foliensatz basiert auf Vorlesungsfolien von **Thomas Schwentick** und **Thomas Zeume**

Literaturhinweise

Lehrbücher

- M. Kreuzer and S. Kühling. *Logik für Informatiker*. Pearson, 2006 (Kapitel 2)
- Uwe Schöning. *Logik für Informatiker*. Spektrum Akademischer Verlag, 5. a. edition, 2000 (Kapitel 1.1)