Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 5

Präsenzaufgabe 5.1

(a) Es sei

$$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$$

ein Polynom vom Grad $n > 0$ mit Nullstelle

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \qquad \mathrm{ggT}(p, q) = 1.$$

Zeigen Sie, dass

$$q \mid a_n \qquad \text{und} \qquad p \mid a_0$$

gelten.

Hinweis: Sie dürfen nutzen, dass für ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt: $a \mid b \cdot c \implies a \mid c$.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom

$$g(X) = 2X^7 + X^3 + X^2 + 3X + 1$$

keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Präsenzaufgabe 5.2

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA.

(b) Was können Sie aus Ihrer Rechnung über die Matrizen A und B folgern?

(c) Lösen Sie mithilfe von (b) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ x + 3y &= 7. \end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 5.3

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ 2x + 3y + z &= 7, \\ x + 2y &= 3. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$.

(b) Bringen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren in Zeilenstufenform.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems.

Präsenzaufgabe 5.4

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich und geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie verwendet haben.

(a) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$,

(b) $g(x) = e^{x^2 - 2x}$,

(c) $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$,

(d) $k(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$.

Präsenzaufgabe 5.5

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ und bestimmen Sie die Intervalle, auf denen f streng wächst bzw. streng fällt.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f und geben Sie die zugehörigen Funktionswerte an.

(d) Bestimmen Sie die Wendestellen von f.

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse.

Präsenzaufgabe 5.6

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit Seitenlänge 6 werden an den vier Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten. Anschließend werden die vier Seiten hochgeklappt, sodass eine oben offene Schachtel entsteht.

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von x durch

$$V(x) = x(6 - 2x)^2$$

gegeben ist. Für welche Werte von x ist diese Konstruktion möglich?

(b) Berechnen Sie die Ableitung $V'(x)$ und bestimmen Sie deren Nullstellen.

(c) Für welchen Wert von x ist das Volumen der Schachtel maximal? Wie groß ist das maximale Volumen?