Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 4

Präsenzaufgabe 4.1
Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von 18.216.

Präsenzaufgabe 4.2
Entscheiden Sie, ob die folgenden Zuordnungsvorschriften eine Abbildung $M \to N$ definieren. Wenn ja, geben Sie außerdem an, ob die jeweilige Abbildung injektiv oder surjektiv ist. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $M = \{\text{a, b, c, d, e}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subseteq \mathbb{N}$, a $\mapsto 4$, b $\mapsto 1$, c $\mapsto 6$, d $\mapsto 3$, e $\mapsto 2$, wobei a, b, c, d und e Buchstaben sind

(b) $M = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $N = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $X \mapsto X \setminus \{\varnothing\}$

(c) $M = \{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = N \subseteq \mathbb{Z}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^3, z^4)$

(d) $M = \{0,1\}^3 = N \subseteq \mathbb{Z}^3$, $(x, y, z) \mapsto (yz, xz, xy)$

Präsenzaufgabe 4.3
Es seien M, N, K Mengen und $f : M \to N$ und $g : N \to K$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist f injektiv und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

(b) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

(c) Ist f injektiv und g injektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(d) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(e) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(f) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f surjektiv.

(g) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

(h) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g surjektiv.

Präsenzaufgabe 4.4
Es seien M, N nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $K, L \subseteq N$ gelten

(i) $f^{-1}(K \cup L) = f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L)$.
(ii) $f^{-1}(K \cap L) = f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)$.

(b) Für $A, B \subseteq M$ gelten

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Zeigen Sie weiterhin, dass die umgekehrte Inklusion in (b) (ii) nicht gilt.

Präsenzaufgabe 4.5
Teilen Sie das Polynom $f(X)$ mit Rest durch das Polynom $g(X)$ für:

(a) $f(X) = X^5 - 4X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 4X + 3, \qquad g(X) = X^3 - 2X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(b) $f(X) = X^n - 1, \qquad g(X) = X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ für $n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 4.6
Bestimmen Sie alle polynomiellen Funktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $p(-x) = -p(x)$ erfüllen.