Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabe 3.1

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie die *umgekehrten Dreiecksungleichungen*

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \quad \text{und} \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Geben Sie weiterhin für jede der Ungleichungen jeweils ein Beispiel an, in dem echte Ungleichheit gilt und ein Beispiel in dem Gleichheit gilt.

Präsenzaufgabe 3.2

Bestimmen Sie für die folgenden Ungleichungen jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die dieser genügen:
(a) $(x-1)(x-3) > 0$ (b) $x^3 + 5x^2 > 0$ (c) $x^2 - 4x < 0$ (d) $\frac{x-1}{x-3} > 0$

Hausaufgabe 3.1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$

(d) 6 teilt $3^n - 3$.

(e) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Präsenzaufgabe 3.3

(a) Eine ganze Zahl x lasse bei Division durch 4 den Rest 1. Zeigen Sie, dass auch x^2 bei Division durch 4 den Rest 1 lässt. Gilt auch die umgekehrte Implikation?

(b) In welchen Fällen lässt x^3 den selben Rest bei Division mit Rest durch 4 wie x?

Präsenzaufgabe 3.4

Zeigen Sie, dass die Zahl $3n^2 - n + 2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gerade ist.