Prof. Dr. Axel Bücher
Dr. Nico Lorenz

Vorkurs Mathematik für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Übungsblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1

(a) Negieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) Studiert eine Studentin im Hauptfach Mathematik, dann studiert sie im Nebenfach Physik.

(ii) Das Essen in der Mensa ist nahrhaft und lecker.

(b) Geben Sie die Kontraposition der folgenden Implikationen an:

(i) Kommt die S-Bahn zu spät, dann wartet der/die Dozent/in mit der Vorlesung.

(ii) Wird ein Test geschrieben, dann lernen alle Studierenden fleißig.

Präsenzaufgabe 2.2

Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4{,}8\}$

(b) $B = \{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ ist ein Teiler von } 24\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 = 0\}$

Präsenzaufgabe 2.3

Gegeben sind die vier Mengen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \quad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \quad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Diskutieren Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen:

$$A = B, \quad A \subseteq B, \quad A \subseteq C, \quad A \in C, \quad A \subseteq D, \quad B \subseteq C, \quad B \subseteq D, \quad B \in D, \quad A \in D.$$

Präsenzaufgabe 2.4

Beweisen Sie Lemma 2.6 (b) aus der Vorlesung: Sind A, B, C Mengen, so gilt

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

Präsenzaufgabe 2.5

Es seien A, B, C Mengen. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf Gültigkeit. Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Präsenzaufgabe 2.6

Es sei $A = \{\emptyset, 1\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Präsenzaufgabe 2.7

Beschreiben Sie das Komplement $\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{P}(A)$ für

$$A = \{1, 2\}, \quad M = \{1, 2, 3\}.$$

Präsenzaufgabe 2.8

Untersuchen Sie die folgenden Verknüpfungen auf Assoziativität und Kommutativität. Bestimmen Sie weiterhin, ob es ein neutrales Element unter der Verknüpfung gibt und falls ja, bestimmen Sie alle Elemente, die ein Inverses besitzen.

(a) $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m^n$

(b) $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

(c) $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy - 4$

(d) $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a, b) \mapsto \min\{a, b\}$

Präsenzaufgabe 2.9

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Machen Sie sich dabei klar, an welchen Stellen welche Rechengesetze eingehen.

(a) $(3a - 11b)(c - a + 2b)$

(b) $2xy + x^2 - 4y + 2x^2 - 5xy$

(c) $(-2d + e) - (5d + 4e) - 2d + 3e$

(d) $12x - (12x + 3y) + (-3y) - (3x - y)$

(e) $33 \cdot (5a + 8b)$

Präsenzaufgabe 2.10

Klammern Sie so viel aus wie möglich.

(a) $-3a^2b - 6ab$

(b) $2ax - 2ax^2$

(c) $24a^3bx + 12axy - 4x$

(d) $-3x^2yz + 6xy^2z - 9xyz^2$