VORKURS-2026

AXEL BÜCHER UND NICO LORENZ

Inhaltsverzeichnis

Grundlegendes 1
1. Logik 3
2. Mengen 6
3. Rechenoperationen 8
4. Ordnung und Betrag 13
5. Vollständige Induktion 16
6. Teilbarkeit und Division mit Rest 20
7. Abbildungen 22
8. Polynomfunktionen und ihre Nullstellen 26
9. Nacharbeiten von Vorlesungen 29
9.1. Definitionen 29
9.2. Verstehen von Beweisen 29
9.3. Lücken in Beweisen 30
9.4. Weitere Techniken 31
9.5. Der Blick aufs große Ganze 31
10. Matrizen und lineare Gleichungssysteme 32
11. Grundlagen der Analysis 36
11.1. Kurvendiskussion und Ableitung aus der Schule 36
11.2. Folgen und Konvergenz 39
11.3. Grenzwerte von Funktionen und Differenzierbarkeit 44
11.4. Extremwerte und Monotonieverhalten 48
12. Trigonometrische Funktionen 52
13. Komplexe Zahlen 57
13.1. Konstruktion der komplexen Zahlen 57
13.2. Die komplexen Zahlen bilden einen Körper 58
13.3. Konjugation und Betrag 59
13.4. Polardarstellung und geometrische Bedeutung der Multiplikation 59
13.5. Die Euler-Formel 60
13.6. Der Fundamentalsatz der Algebra 61
14. Die Exponentialfunktion 62
14.1. Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen 66

Grundlegendes

- Mathematikstudium in den ersten Semestern:
  - Vorlesungen, in denen hauptsächlich Sachverhalte erklärt werden, wenig bis gar keine interaktiven Phasen, sondern sehr viel Input – dennoch: Fragen jederzeit erwünscht!
  - Vorlesungen sollten nachbearbeitet werden: In Ruhe alles noch mal durchgehen, die einzelnen Schritte nachvollziehen, eigene Beispiele finden – wir werden dies auch einmal üben
  - Begleitend: Übungen. Hier werden Präsenzaufgaben unter Anleitung von Studierenden aus höheren Semestern oder Mitarbeitenden besprochen. Sehr wichtig, um den Stoff zu verinnerlichen. Die Zeit, in der Sie sowohl von Ihren Kommilitonen als auch Übungsleitern

Date: 30. September 2026.

lernen können, ist wertvoll. Nutzen Sie diese maximal aus, indem Sie möglich gut vorbereitet in die jeweiligen Veranstaltungen kommen.

- Mathematik: Untersuchung der Eigenschaften abstrakter Strukturen.
- Die zu untersuchende abstrakte Struktur wird in einer *Definition* genauestens festgelegt. Dazu werden *Axiome* genutzt, Eigenschaften, die als beweislos vorausgesetzt werden. Aufbauend auf diesen sollen nun mittels logischer Schlüsse Eigenschaften dieser Strukturen untersucht werden. Die Eigenschaften werden als *Satz* formuliert und anschließend bewiesen, d.h. logisch aus den Axiomen und bisher bewiesenen Aussagen lückenlos hergeleitet. Beweise werden mit dem Wort *Beweis* eingeleitet und das Ende mit einer Box □ gekennzeichnet.

  Je nach Größe und Wichtigkeit der Eigenschaft werden auch die Namen *Proposition* (kleinere Sätze) und *Theorem* (sehr große wichtige Sätze, altgriechisch: Lehrsatz) genutzt. Ein *Korollar* (lat. corollarium: Geschenk, Zusatz) ist eine Folgerung aus einem Satz, ein *Lemma* (altgriechisch: Einnahme) ist eine Hilfsaussage, die für sich genommen oft weniger wichtig ist, beim Aufbau der Theorie aber nützlich ist.
- Die Ziele des Vorkurses liegen auf unterschiedlichen Ebenen:
  - Völlig losgelöst von den Inhalten geht es darum, Sie an die Arbeitsweise im Studium zu gewöhnen. Vorlesungen aktiv hören ist anstrengend, Übungsaufgaben lösen kann sehr herausfordernd sein, ein Studium ist mehr Teamwork als es das Lernen in der Schule war. Beispielsweise können Sie in der Regel die Hausaufgaben gemeinsam abgeben und das Lernen in Gruppen ist eine sehr effektive Strategie zur Prüfungsvorbereitung. Sie lernen neue Leute kennen und viele wohnen in einer neuen Stadt.
  - Inhaltlich wollen wir die Schulmathematik wiederholen und auf eine solide Basis stellen. Wir wiederholen einige zentrale Begriffe und Konzepte. Dabei geben wir schon einen ersten Vorgeschmack auf Inhalte des ersten Semesters, indem wir formale Grundlagen schaffen. Wir gehen nicht immer bis ins letzte Detail, gewöhnen Sie aber bereits an die im Vergleich zur Schule deutlich höheren Präzisionsstandards.
- Inhaltlicher Aufbau der ersten Wochen:
  - Logik (wir wollen immerhin mittels logischer Schlüsse Beweise führen)
  - Mengen (viele zu untersuchende Strukturen lassen sich als Menge beschreiben)
  - Zahlbereiche: Natürliche Zahlen (Primzahlen), ganze Zahlen (Division mit Rest), rationale Zahlen, reelle Zahlen
  - Abbildungen / Funktionen
  - Polynomfunktionen

1. Logik

Wir beginnen mit dem einfachsten Modell der Logik, der Aussagenlogik.

Definition 1.1. *Eine* Aussage *ist ein sprachliches Gebilde, das genau einen Wahrheitswert besitzt, entweder* wahr (w) *oder* falsch (f).

Beispiel 1.2. (a) *„$2+2=4$“ ist eine wahre Aussage.*
(b) *„$2+2=5$“ ist eine falsche Aussage.*
(c) *„Morgen regnet es“ ist keine Aussage.*
(d) *„Dieser Satz ist falsch“ ist keine Aussage.*
(e) *„Jede gerade Zahl ≥ 4 ist Summe von zwei Primzahlen“ ist eine Aussage, deren Wahrheitswert wir nicht kennen (Goldbach-Vermutung).*

Definition 1.3. *Es seien A, B Aussagen. Wir definieren die folgenden Aussagen über ihre Wahrheitsheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von A und B:*
(a) nicht A, *in Zeichen $\neg A$:*

A	$\neg A$
w	f
f	w

(b) A oder B, *in Zeichen $A \vee B$:*
(c) A und B, *in Zeichen $A \wedge B$:*
(d) A impliziert B (A folgt B), *in Zeichen $A \Rightarrow B$:*
(e) A ist äquivalent zu B (A genau dann, wenn B), *in Zeichen $A \iff B$:*

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Beispiel 1.4. *Wir betrachten die Aussage $A \vee \neg A$. Wir zeigen mittels einer Wahrheitstafel, dass diese Aussage immer wahr ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A:*

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	w	f
f	w	w	f

Eine solche Aussage nennt man auch Tautologie.
Ganz ähnlich zeigt man, dass $A \wedge \neg A$ immer falsch ist.

Die oben für die Definition der *Junktionen* benutzten Wahrheitstafeln kann man auch für Beweise von Formeln von Aussagen nutzen. Dabei zeigt man diese Formeln im Endeffekt durch eine vollständige Fallunterscheidung.

Lemma 1.5. *Es seien A, B, C Aussagen. Dann gelten*
(a) $\neg\neg A \iff A$
(b) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
(c) $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$
(d) $(A \Rightarrow B) \iff ((\neg A) \vee B)$.
(e) $(A \Rightarrow B) \iff ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ *(Kontraposition).*
(f) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \iff (A \iff B)$
(g) $((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow A$ *(Widerspruchsbeweis).*

Beweis. □

Wir wollen einige der obigen Regeln zur Illustration direkt anwenden. Dabei benutzen wir Symbole und Tatsachen, die wir zwar erst später (mehr oder weniger) formal einführen werden, mit denen wir aber eine gewisse Vertrautheit aus der Schule voraussetzen.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
w	f	w
f	w	f

TABELLE 1. Beweis zu (a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$
w	w	f	f	w	w	f	f	f	f	w	
w	f	f	w	f	w	w	f	w	f	w	
f	w	w	f	f	w	w	f	w	f	w	
f	f	w	w	f	f	w	w	w	w	w	

TABELLE 2. Beweis zu (b) und (c)

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \iff ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$
w	w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w	w

TABELLE 3. Beweis zu (d) und (e)

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$(A \iff B)$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \iff (A \iff B)$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

TABELLE 4. Beweis zu (f)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$	$((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B))$	$((\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow A$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	w	w	f	w	f	w

TABELLE 5. Beweis zu (g)

Lemma 1.6. *Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist a^2 gerade genau dann, wenn a gerade ist.*

Beweis. Es sei A: a^2 ist gerade und B: a ist gerade. Wir wollen zeigen $A \iff B$. Dazu können wir nach Lemma 1.5 auch die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

Beginnen wir mit $A \Rightarrow B$. Dazu zeigen wir die Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wir zeigen also: ist a ungerade, so ist auch a^2 ungerade.

Ist $a \in \mathbb{Z}$ ungerade, so existiert ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2b + 1$. Dann gilt

$$a^2 = (2b+1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 2(2b^2 + 2b) + 1$$

und diese Zahl ist ungerade.

Zeigen wir nun $B \Rightarrow A$. Sei also a gerade, d.h. $a = 2b$ für ein $b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$a^2 = (2b)^2 = 4b^2 = 2(2b^2),$$

also ist a^2 gerade. □

Satz 1.7. *Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Wir betrachten die Aussage A: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Wir nehmen also $\neg A$ an: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann lässt sich $\sqrt{2}$ schreiben als gekürzten Bruch $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ (Aussage B). Wir wollen nun aus $\neg A$ auch $\neg B$ folgern, also dass $\frac{a}{b}$ keine gekürzte Darstellung von $\sqrt{2}$ als Bruch ist.

Quadrieren der Gleichung liefert

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \iff 2b^2 = a^2.$$

Damit ist a^2 gerade und nach Lemma 1.6 ist a gerade. Also gibt es $x \in \mathbb{N}$ mit $a = 2x$. Dann folgt

$$2b^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2 \iff b^2 = 2x^2.$$

Dann ist also auch b^2 gerade und wieder nach Lemma 1.6 ist b gerade. Aber dann ist $\frac{a}{b}$ kein gekürzter Bruch $(\neg B)$, Widerspruch. Also gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Oft will man Aussagen nicht nur über ein einzelnes „Objekt“ treffen. Dafür führen wir den folgenden Begriff ein, um die Aussagenlogik zu erweitern.

Definition 1.8. (a) *Ein* Prädikat *ist eine Aussage $P(x)$, die von einer Variablen x abhängt.*
(b) *Ist $P(x)$ ein Prädikat, so definieren wir $\forall x : P(x)$ als die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn für alle x die Aussage $P(x)$ wahr ist*
(c) *Ist $P(x)$ ein Prädikat, so definieren wir $\exists x : P(x)$ als die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn (mindestens) ein x existiert für das die Aussage $P(x)$ wahr ist.*

Beispiel 1.9. (a) *Die Aussage $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 1 > x$ ist wahr.*
(b) *Es sei $A(x)$ die Aussage x* studiert an der RUB *und $B(x)$ die Aussage x* wohnt in Bochum. *Die Aussage $\forall x : A(x) \Rightarrow B(x)$ ist falsch.*
(c) *$\exists x : x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2$ ist eine falsche Aussage nach Satz 1.7.*

Lemma 1.10. *Es sei $P(x)$ ein Prädikat. Dann gelten*
(a) $(\neg \forall x : P(x)) \iff \exists x : \neg P(x)$
(b) $(\neg \exists x : P(x)) \iff \forall x : \neg P(x)$

Beweis. (a): Die Aussage $\neg \forall x : P(x)$ ist wahr genau dann, wenn $\forall x : P(x)$ falsch ist, d.h. genau dann, wenn es ein x gibt, für das $P(x)$ falsch ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein x gibt, für das $\neg P(x)$ wahr ist, also wenn die Aussage $\exists x : \neg P(x)$ wahr ist. Damit haben beide Aussagen immer denselben Wahrheitswert und sind somit äquivalent.
(b): Die Aussage $\neg \exists x : P(x)$ ist wahr genau dann, wenn $\exists x : P(x)$ falsch ist, d.h. genau dann, wenn für alle x die Aussage $P(x)$ falsch ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für alle x die Aussage $\neg P(x)$ wahr ist, also wenn die Aussage $\forall x : \neg P(x)$ wahr ist. Die Behauptung folgt dann wir zuvor in Teil (a). □

Beispiel 1.11. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \neg(\forall x : A(x) \Rightarrow B(x)) &\iff \exists x : \neg(A(x) \Rightarrow B(x)) \\ &\iff \exists x : \neg(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &\iff \exists x : A(x) \wedge \neg B(x). \end{aligned}$$

Die Negationen der Aussagen aus Beispiel 1.9 (a) und (b) sind also:
- *Es gibt eine reelle Zahl x mit $x \geq x + 1$, oder formal: $\exists x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq x + 1$*
- *Es gibt einen Studierenden der RUB, der nicht in Bochum wohnt*

2. Mengen

Definition 2.1. *Eine* Menge M *ist eine Zusammenfassung zu einem Ganzen von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten, genannt den* Elementen *von M, sodass für alle Objekte x „x ist Element von M“ eine Aussage ist. Ist x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$, andernfalls schreiben wir $x \notin M$.*

Beispiel 2.2. *Zur Notation von Mengen nutzt man geschweifte Klammern $\{\}$, innerhalb dieser man die Elemente beschreibt.*

(a) *Man kann eine Menge durch Aufzählen aller Elemente beschreiben: $\{1, 2, 3\}$ die die Menge, die die Zahlen $1, 2$ und 3 enthält.*

(b) *Für eine Menge kann man nur entscheiden, welche Elemente enthalten sind. Es gibt keine Reihenfolge und keine Häufigkeiten. Daher gilt*

$$\{4, 4, 2, 1\} = \{4, 2, 1\} = \{1, 2, 4\}.$$

(c) *Wir bezeichnen die* leere Menge, *d.h. die Menge, die keine Elemente enthält, mit $\emptyset$.*

(d) *Beschreibung durch Aufzählen einiger Elemente:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Vorsicht bei Uneindeutigkeiten:

$$\{1, 3, 5, 7, \dots, 19\}$$

könnte die Menge aller ungeraden Zahlen kleiner als 20 sein oder die Menge aller Zahlen kleiner 20, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

(e) *Man kann Mengen mittels eines Prädikats $P(x)$ beschreiben:*

$$\{x \mid P(x)\}$$

besteht dann aus allen x, für die $P(x)$ wahr ist. Beispielsweise gilt

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x > 0\}.$$

Diese Schreibweise kann gewisse Probleme erzeugen, denn nicht für jedes Prädikat P ist $\{x \mid P(x)\}$ eine Menge und wir werden sie daher selten gebrauchen.

Betrachte dazu etwa

$$M = \{x \mid x \text{ ist eine Menge mit } x \notin x\},$$

also die „Ansammlung“ aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Falls $M \in M$ gälte, so wäre nach Definition von M dann $M \notin M$, Widerspruch. Falls jedoch $M \notin M$ gilt, so folgt nach Definition von M aber $M \in M$, ebenfalls Widerspruch. Also ist nicht entscheidbar, ob $M \in M$ gilt, d.h. $M \in M$ ist keine Aussage und M damit keine Menge.

Dies ist bekannt unter dem Namen Russel Paradoxon, *nach Bertrant Russell.*

(f) *Betrachtet man eine Menge M, deren Elemente allesamt Elemente einer anderen Menge N sind, so schreibt man auch $M = \{x \in N \mid P(x)\}$. Beispielsweise gilt*

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}.$$

So umgeht man das in (e) angesprochene Problem.

(g) *Weitere Mengen, die Ihnen bekannt sein sollten:*

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R},$$

die Mengen der rationalen Zahlen und der reellen Zahlen (diese werden wir später genauer behandeln).

Definition 2.3. *Es seien A, B Mengen.*

(a) *Die Mengen A und B heißen* gleich, *in Zeichen $A = B$, falls für alle x genau dann $x \in A$ gilt, wenn $x \in B$ gilt.*

(b) *Die Menge A heißt* Teilmenge *von B, in Zeichen $A \subseteq B$, falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.*

(c) *Wir definieren die* Vereinigung von A und B, *in Zeichen $A \cup B$, als*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

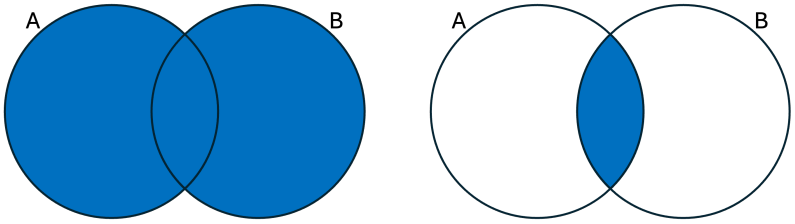
(d) *Wir definieren den* Durchschnitt von A und B, *in Zeichen $A \cap B$, als*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

(e) *Wir definieren die* Mengendifferenz von A und B, *in Zeichen* $A \setminus B$, *als*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Beispiel 2.4. (a) *Mengen und Operationen zwischen ihnen illustriert man häufig mittels Venn-Diagrammen. Unten abgebildet sind die Venndiagramme für* $A \cup B$ *und* $A \cap B$.



(b) *Es sei* $A = \{1, 2, 4, 8\}$ *und* $B = \{1, 3, 4, 7\}$. *Dann gelten*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \quad \text{und} \quad A \cap B = \{1, 4\}.$$

(c) *Es sei* A *die Menge aller durch* 2 *teilbaren natürlichen Zahlen,* B *die Menge aller durch* 3 *teilbaren natürlichen Zahlen und* C *die Menge aller durch* 4 *teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist* $A \cap B$ *die Menge aller durch 2 und 3 teilbaren natürlichen Zahlen (also aller Zahlen, die durch 6 teilbar sind!). Weiter gelten* $A \cap C = C$ *sowie* $A \cup C = C$.

(d) *Es sei* A *die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen und* B *die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Dann gilt* $A \cup B = \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.5. *Nach Definition sind zwei Mengen* A *und* B *genau dann gleich, wenn für alle* x *gilt:* $x \in A \iff x \in B$. *Dies ist nach Lemma 1.5 (f) äquivalent zu* $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$, *also zu* $A \subseteq B$ *und* $B \subseteq A$.

Wir nutzen die Beschreibung für Mengengleichheit aus Bemerkung 2.5 im Beweis des folgenden Resultats.

Lemma 2.6. *Es seien* A, B, C *Mengen. Dann gelten*

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Beweis. (a): Wir zeigen zunächst $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dies zeigen wir elementweise. Sei dazu $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann gilt $x \in A$ (Fall 1) oder $x \in B \cap C$ (Fall 2). In beiden Fällen gelten dann auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$ und damit

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Nun zeigen wie die andere Inklusion. Sei dazu $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann gelten $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Aus der ersten Bedingung folgt $x \in A$ oder $x \in B$. Im ersten Fall gilt dann sicher auch $x \in A \cup (B \cap C)$.

Falls nicht $x \in A$ gilt, also falls $x \notin A$ gilt, so folgt aus der zweiten Bedinung $x \in C$. Damit gilt dann auch $x \in B \cap C$ und schließlich $x \in A \cup (B \cap C)$.

(b): Übung. □

Definition 2.7. *Es sei* A *eine Menge. Die* Potenzmenge von A *ist definiert als*

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\},$$

d.h. als die Menge aller Teilmengen von A.

Beispiel 2.8. (a) $\mathcal{P}(\{\square, \triangle\}) = \{\emptyset, \{\square\}, \{\triangle\}, \{\square, \triangle\}\}$.

(b) $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

(c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(d) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(e) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Im nächsten Kapitel widmen wir uns Zahlbereichen. Zentraler Punkt dort wird es sein, die Rechenoperationen zu untersuchen. Damit wir formal definieren können, was eine Rechenoperation ist, benötigen wir aus der Mengentheorie noch die folgende Konstruktion:

Definition 2.9. *Es seien* A, B *nichtleere Mengen. Das* kartesische Produkt $A \times B$ *ist definiert als*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

3. Rechenoperationen

Aus der Schule bekannte Zahlbereiche sind

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\}\\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\\ \mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}\\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}\\ \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dabei ist jedoch nicht klar, wie die einzelnen Zahlbereiche genau definiert sind. Was ist beispielsweise die Zahl 27? Hierfür gibt es spezielle Konstruktionen, auf die wir allerdings nicht eingehen werden, da in diesem Kapitel der Fokus auf die Rechengesetze liegen wird.

Die Bezeichnungen für die natürlichen Zahlen sind nicht immer eindeutig. Viele Autoren inkludieren die 0 in der Menge der natürlichen Zahlen, im Ausland (z.B. Frankreich) wird manchmal $\mathbb{N}_0$ für die natürlichen Zahlen *ohne* 0 benutzt.

Es gelten die strikten Inklusionen

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Auf den oben wiederholten Zahlbereichen haben wir Rechenoperationen. Wir geben die formale Definition:

Definition 3.1. *Es sei M eine nichtleere Menge. Eine* (zweistellige innere) Verknüpfung auf M *ist eine Vorschrift $*$, die jedem Element aus $M \times M$ ein eindeutiges Element aus M zuordnet. Wird dem Element (m_1, m_2) mittels $*$ das Element m zugeordnet, so schreiben wir*

$$m_1 * m_2 = m.$$

Häufige Symbole für Verknüpfungen sind $+, \cdot, *, \circ$.

Beispiel 3.2. (a) *Die Addition ist eine Verknüpfung auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.*
(b) *Subtraktion ist eine Verknüpfung auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, aber nicht auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.*
(c) *Multiplikation ist eine Verknüpfung auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und auch eine Verknüpfung auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Definition 3.3. *Es sei M eine nichtleere Menge und $*$ eine Verknüpfung auf M. Ein Element $e \in M$ heißt* neutrales Element *bzgl. $*$, falls für alle $m \in M$ gilt: $e * m = m = m * e$.*

Beispiel 3.4. (a) *1 ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation auf $\mathbb{R}$, 0 ist das neutrale Element bzgl. der Addition auf $\mathbb{R}$, genau so in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$.*
(b) *Bzgl. der Addition gibt es in $\mathbb{N}$ kein neutrales Element.*

Definition 3.5. *Es sei $*$ eine Verknüpfung auf M mit neutralem Element e. Sei $a \in M$. Ein Element $b \in M$ heißt* Inverses zu a, *falls*

$$a * b = e = b * a$$

gilt.

Beispiel 3.6. (a) *In $\mathbb{N}_0$ ist 0 das neutrale Element bzgl. der Addition. Das einzige Element, das ein Inverses besitzt, ist 0.*
(b) *In $\mathbb{Z}$ hat jedes Element ein Inverses bzgl. Addition, das Inverse zu a ist gegeben durch $-a$.*
(c) *Die einzigen Elemente in $\mathbb{Z}$, die ein multiplikativ Inverses besitzen, sind 1 und -1*
(d) *In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ haben alle Elemente ein Inverses bzgl. $+$ und alle Elemente außer 0 ein Inverses bzgl. $\cdot$.*

In der Algebra untersucht man häufig Mengen, auf denen eine Verknüpfung definiert ist. Je nach den Eigenschaften der Verknüpfung haben diese Mengen dann unterschiedliche Namen wie *Monoid, Gruppe, Ring, Körper, Algebra, Vektorraum.* Wir führen nun zwei wichtige Eigenschaften ein.

Definition 3.7. *Eine Verknüpfung $*$ auf einer nichtleeren Menge A heißt*
(a) kommutativ, *wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $a * b = b * a$.*

(b) assoziativ, *wenn für alle* $a, b, c \in A$ *gilt:* $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Beispiel 3.8. *Addition und Multiplikation auf* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *sind sowohl kommutativ als auch assoziativ. Subtraktion ist auf* $\mathbb{Z}$ *weder kommutativ noch assoziativ, denn es gelten beispielsweise*

$$0 - 1 = -1 \neq 1 = 1 - 0$$

und

$$1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1 = (1 - 1) - 1.$$

Beispiel 3.9. *Wir zeigen nun, warum man in den reellen Zahlen nicht durch 0 teilen kann. Angenommen man könnte durch 0 teilen, d.h. es existiert ein zu 0 inverses Element* 0^{-1} *mit* $0 \cdot 0^{-1} = 1 = 0^{-1} \cdot 0$. *Dann gilt*

$$0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 0^{-1}) = (0 \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 1,$$

Widerspruch. Daher ist die Division durch 0 nicht definiert.

Allgemeiner gälte für alle $x \in \mathbb{R}$ *dann sogar*

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (0 \cdot 0^{-1}) = (x \cdot 0) \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 1 = 0,$$

d.h. alle Zahlen wären identisch.

Mengen mit mehreren Verknüpfungen haben besonders dann eine reichhaltige Struktur, wenn die darauf definierenden Verknüpfungen in einem gewissen Sinne miteinander kompatibel sind. Im Fall der hier vorgestellten Rechenbereiche haben wir Folgendes:

Satz 3.10. *Für Addition und Multiplikation auf den reellen Zahlen (und damit auch auf allen Teilmengen) gelten die* Distributivgesetze, *d.h. für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gelten:*

- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Aus diesen Gesetzen folgen direkt die binomischen Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Beispielsweise gilt die erste binomische Formel da alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b \\ &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Dass wir diese Gesetzmäßigkeiten allein auf die oben eingeführten Kommutativ- und Distributivgesetze zurückführen konnten, heißt, dass diese auch in allen anderen Rechenbereichen, die diese Gesetze erfüllen (sogenannte *kommutative Ringe*), gelten. Dies ist ein entscheidender Vorteil der Axiomatisierung. Wir können Rechenregeln wie binomische Formeln universell in allen kommutativen Ringen einsetzen, wie z.B. in $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen, auch wichtig für Anwendungen in der Elektrotechnik) oder $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (Rechnen mit Divisionsresten, wichtig für die Zahlentheorie).

Definition 3.11. *Eine nichtleere Menge* K *mit zwei Verknüpfungen* $+, \cdot$ *heißt* Körper, *falls gilt:*

- $+$ *ist assoziativ*
- *es gibt ein neutrales Element 0 bzgl.* $+$
- *für alle* $x \in K$ *gibt es ein bzgl.* $+$ *inverses Element, in Zeichen* $-x$
- $+$ *ist kommutativ*
- $\cdot$ *ist assoziativ*
- *es gibt ein neutrales Element* $1 \in K \setminus \{0\}$ *bzgl.* $\cdot$
- *für alle* $x \in K \setminus \{\}$ *gibt es ein bzgl.* $\cdot$ *inverses Element, in Zeichen* x^{-1} *oder* $\frac{1}{x}$
- $+$ *ist kommutativ*
- *es gelten die Distributivgesetz: für alle* $x, y, z \in K$ *gilt*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Beispiel 3.12. $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$ *sind Körper mit üblichen Verknüpfungen,* $\mathbb{Z}$ *ist kein Körper.*

Aus der Schule kennen Sie die Dezimalentwicklung von reellen Zahlen: ist die Dezimalentwicklung von x gegeben durch

$$x = A_N A_{N-1} \cdots A_1 A_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

wobei $A_0, \ldots, A_{N-1} \in \{0, \ldots, 9\}$, $A_N \in \{1, \ldots, 9\}$ die Ziffern vor dem Komma und $a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}$ die Ziffern nach dem Komma sind, so gilt

$$x = A_N \cdot 10^N + A_{n-1} \cdot 10^{N-1} + \ldots + A_1 \cdot 10 + A_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 + 10^{-2} + \ldots.$$

Bemerkung 3.13. *Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Dazu betrachten wir $x = 0,\overline{9}$. Dann gilt also*

$$x = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

Multiplikation mit 10 liefert

$$10x = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 9 + x,$$

was äquivalent ist zu $x = 1$. Damit ist also $1 = 0,\overline{9}$.

Beachte, dass die Argumentation in diesem Beweis noch etwas lückenhaft ist. Wir rechnen hier mit unendlichen Summen. Es ist aktuell noch nicht klar, was das überhaupt sein soll und warum wir damit genau so rechnen können, wie sonst auch. Diese Begründungen werden teilweise schon während des Vorkurses nachgeholt, spätestens in der Analysis 1 werden diese Lücken dann restlos geschlossen (Stichwort geometrische Reihe*).*

Die Menge der rationalen Zahlen kann über die Dezimalentwicklung charakterisiert werden.

Satz 3.14. *Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist die Menge der (abbrechenden oder) periodischen Dezimalbrüche.*

Es gilt beispielsweise

$$\frac{66}{1000} = 0{,}066, \quad \frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots = 0{,}8\overline{3}, \quad \frac{5}{130} = 0{,}0\overline{384615}.$$

Beispiele für irrationale Zahlen, d.h. Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind

$$\pi = 3{,}1415926\ldots, \qquad \sqrt{2} = 1{,}414\ldots, \qquad e = 2{,}718\ldots.$$

Wir konnten bereits beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Für π und e ist dies bedeutend schwieriger. Es ist ein offenes Problem, ob $\pi + e$ und $\pi \cdot e$ rational sind!

Mit den Dezimalentwicklungen kann man schriftlich rechnen wie man es aus der Schule kennt. In vielen Fällen ist jedoch die Bruchschreibweise günstiger. Daher wiederholen wir:

Satz 3.15. *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$. Dann gelten*

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$
(b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
(c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
(d) *falls zusätzlich $c \neq 0$:* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

Um längere Ausdrücke notieren zu können, führen wir die folgende Schreibweise ein.

Definition 3.16. *Sind $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq \ell$ und reelle Zahlen $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_\ell \in \mathbb{R}$ gegeben, so definieren wir*

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i := a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell$$

sowie

$$\prod_{i=k}^{\ell} a_i := a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_\ell.$$

Im Fall $k = \ell$ gilt insbesondere

$$\sum_{i=k}^{k} a_i = \prod_{i=k}^{k} a_i = a_k.$$

Im Fall $k > \ell$ setzen wir

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = 0 \qquad \textit{und} \qquad \prod_{i=k}^{\ell} a_i = 1$$

(leere Summe bzw. leeres Produkt).

Beispiel 3.17. (a) $\sum_{k=1}^{5} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 30.$

(b) $\prod_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

Die obige Schreibweise ist zum Beispiel nützlich, um Potenzen mit ganzzahligem Exponenten formal zu definieren.

Definition 3.18. *Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $x = 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x.$$

Falls $x \neq 0$ setzen wir

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

Satz 3.19. *Es sei $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten*

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(b) $x^n \cdot y^n = (xy)^n$

(c) $(x^m)^n = x^{mn}$.

Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Die Fälle, in denen $n = 0$ oder $m = 0$ gilt, sind klar. Wir nehmen daher nun an, dass $n, m \neq 0$ gilt.

(a): 1. Fall: $n, m > 0$. Dann gilt

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = x^{m+n}.$$

2. Fall: $n, m < 0$. Dann gilt

$$x^m \cdot x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-m} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-m-n} = x^{m+n}.$$

3. Fall: $n > 0, m < 0$. Sei zunächst $|m| \leq n$. Dann gilt

$$x^m \cdot x^n = \frac{1}{x^{-m}} \cdot x^{-m} \cdot x^{n+m} = x^{n+m}.$$

Die anderen Fälle sind ähnlich.

(b): 1. Fall: $n > 0$. Dann gilt

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) \cdot (y \cdot y \cdot \ldots \cdot y) = (xy) \cdot (xy) \cdot \ldots \cdot (xy) = (xy)^n.$$

2. Fall: $n < 0$. Dann gilt

$$x^n \cdot y^n = \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{xy} \cdot \frac{1}{xy} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{xy}\right)^{-n} = (xy)^n,$$

wobei alle Faktoren jeweils $-n$ mal vorkommen.

(c): Fall 1: $n, m > 0$: Hier gilt

$$(x^m)^n = x^m \cdot \ldots \cdot x^m = (x \cdot \ldots \cdot x) \cdot \ldots \cdot (x \cdot \ldots \cdot x) = x^{mn}.$$

Fall 2: $n > 0, m < 0$. Dann ist

$$(x^m)^n = \left(\frac{1}{x^{-m}}\right)^n = \frac{1}{x^{-m}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{(x^{-m})^n} = \frac{1}{x^{(-m)n}} = x^{-(-m)n} = x^{mn}.$$

Fall 3 $n < 0, m > 0$: Dann gilt

$$(x^m)^n = \frac{1}{(x^m)^{-n}} = \frac{1}{x^{-mn}} = x^{-(-mn)} = x^{mn}.$$

Fall 4: $n, m < 0$. Dann ist

$$(x^m)^n = \left(\frac{1}{x^{-m}}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{x^{-m}}}\right)^{-n} = (x^{-m})^{-n} = x^{-m\cdot(-n)} = x^{mn}.$$

□

4. Ordnung und Betrag

Wir haben die Möglichkeit, reelle Zahlen mittels $<$ zu vergleichen.

Satz 4.1. *Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der Fälle*

$$a < b, \qquad b < a, \qquad a = b.$$

Statt $a < b$ schreibt man oft auch $b > a$. Weiterhin genutzt wird $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$ gilt, analog auch $\geq$.

Definition 4.2. *Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* positiv*, falls $a > 0$ gilt und* negativ*, falls $a < 0$ gilt.*

Satz 4.3. *Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(a) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ *(Transitivität)*
(b) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ *(Monotonie der Addition)*
(c) $a > 0 \wedge b < c \Rightarrow ab < ac$ *(Monotonie der Multiplikation)*

In einem axiomatischen Ansatz definiert man generell eine totale Ordnung auf einem Körper als eine sogenannte *Relation*, die die Eigenschaften aus Satz 4.1 und Satz 4.3 erfüllt und baut auf diesen Axiomen die weitere Theorie auf. Wir werden hier ebenfalls die weiteren Eigenschaften der Ordnung $< a$ auf die obigen Eigenschaften zurückführen.

Korollar 4.4. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(a) $a > 0 \iff -a < 0$
(b) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Beweis. (a): Es sei $a \in \mathbb{R}$. Wir setzen zunächst $a > 0$ voraus. Addition mit $-a$ liefert unter Verwendung von Satz 4.3 (b) nun $0 = a + (-a) > 0 + (-a) = -a$.

Sei nun umgekehrt $-a < 0$ vorausgesetzt. Addition mit a liefert nun wieder mittels Satz 4.3 (b) $0 = -a + a < 0 + a = a$.

(b): Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Ist $a > 0$, so gilt nach Satz 4.3 (c) $a^2 = a \cdot a > 0$. Andernfalls ist $-a > 0$ und es folgt genauso $a^2 = (-a)^2 > 0$. □

Korollar 4.5. *Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

(a) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
(b) $a < 0 \wedge b < c \Rightarrow ab > ac$.

Beweis. (a): Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Addition der ersten Ungleichung mit c sowie der zweiten mit b liefet

$$a + c < b + c \quad \text{und} \quad b + c < b + d.$$

Wegen der Transitivität folgt nun

$$a + c < b + d,$$

wie behauptet.

(b): Ist $a < 0$, so folgt $0 < -a$ nach Korollar 4.4 (a). Damit folgt aus $b < c$ nun $-ab < -ac$ und Addition von $ab + ac$ liefert dann $ac > ab$. □

Satz 4.6. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$
(b) $a \cdot b > 0 \iff$ *entweder $a > 0$ und $b > 0$ oder $a < 0$ und $b < 0$.*

Beweis. Wir beweisen beide Teile gleichzeitig. Zunächst bemerken wir, dass für $a = 0$ oder $b = 0$ sicher $a \cdot b = 0$ gilt.

Es genügt also die Fälle $a, b \neq 0$ zu betrachten. Diese können wir aus folgender Tabelle entnehmen, in welcher wir eine vollständige Fallunterscheidung durchführen. Die Ergebnisse aus der letzten Zeile folgen direkt aus Satz 4.3 (c) und Korollar 4.4 (a) wegen $ab = (-a)(-b)$.

a	b	$a \cdot b$
$a > 0$	$b > 0$	$a \cdot b > 0$
$a > 0$	$b < 0$	$a \cdot b < 0$
$a < 0$	$b > 0$	$a \cdot b < 0$
$a < 0$	$b < 0$	$a \cdot b > 0$

□

Weiter erfüllt die Anordnung der reellen Zahlen die folgende fundamentale Eigenschaft:

Satz 4.7 (Archimedisches Axiom)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Umgangssprachlich bedeutet dies, dass jede reelle Zahl nach oben durch eine natürliche Zahl abgeschätzt werden kann.

Definition 4.8. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Wir definieren die folgenden Mengen, genannt* beschränkte Intervalle*:*

(a) abgeschlossenes Intervall*:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
(b) offenes Intervall*:* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Ferner definieren wir die halboffenen Intervalle

(c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
(d) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Weiter definieren wir die unbeschränkten Intervalle*:*

(e) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
(f) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
(g) $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
(h) $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Weiter nutzen wir die Schreibweisen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}_{>0} := (0, \infty).$$

Beispiel 4.9. *Wir bestimmen alle $x \in \mathbb{R}$ für die $(x-3)(x-5) > 0$ gilt. Nach Satz 4.6 (b) gilt für solche x entweder $x - 3 > 0$ und $x - 5 > 0$ (Fall 1) oder $x - 3 < 0$ und $x - 5 < 0$ (Fall 2). In Fall 1 gelten $x > 3$ und $x > 5$, also $x > 5$. Analog tritt der zweite Fall genau dann ein, wenn $x < 3$. Die Lösungsmenge ist also gegeben als*

$$(-\infty, 3) \cup (5, \infty).$$

Definition 4.10. *Der* Betrag *einer reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $|x - y|$ der Abstand *von x und y.*

Aus den Rechenregeln für die Ordnungsrelation folgert man nun leicht:

Satz 4.11. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

(a) $|x| \geq 0$ *mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$*
(b) $|-x| = |x|$
(c) $-|x| \leq x \leq |x|$
(d) $|xy| = |x| \cdot |y|$

Beweis. (a): Ist $x = 0$, so gilt $|x| = x = 0$. Ist $x > 0$, so gilt $|x| = x > 0$. Ist $x < 0$, so gilt $|x| = -x = -(-x) > 0$ nach Korollar 4.4 (a).

(b): Ist $x = 0$, so gilt $-x = x$ und die Aussage ist klar. Sei nun $x \neq 0$. Wir können $x > 0$ annehmen. Dann gilt $|-x| = -(-x) = x = |x|$.

(c): Wieder ist der Fall $x = 0$ klar. Sei nun $x > 0$. Dann gilt $-|x| < 0 \leq x = |x|$.
Sei nun $x < 0$. Dann gilt $-|x| = -(-x) = x < 0 < |x|$.

(d): Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist die Aussage klar.
Seien nun zunächst $x, y > 0$. Dann ist auch $xy > 0$ und es folgt

$$|xy| = xy = |x| \cdot |y|.$$

Sei nun $x > 0$ und $y < 0$. Dann ist $xy < 0$ und es gilt

$$|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

Der Fall $x < 0$ und $y > 0$ verläuft analog.
Wir betrachten nun den Fall $x < 0, y < 0$. Dann ist $xy > 0$ und es gilt

$$|xy| = xy = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|.$$

□

Satz 4.12 (Dreiecksungleichung)**.** *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Ist $x + y = 0$, so ist die Aussage klar. Sei nun $x + y > 0$. Dann gilt $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ unter Verwendung von Satz 4.11 (c).

Ist $x + y < 0$, so gilt $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$ wieder wegen Satz 4.11 (c). □

Damit haben wir nun die ersten grundlegenden Werkzeuge zum Rechnen in den verschiedenen Zahlbereichen. Wir werden nun einzeln die jeweiligen Zahlbereiche uns genauer anschauen.

5. Vollständige Induktion

Satz 5.1 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(a) *$A(1)$ sei wahr*

(b) *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Falls $A(n)$ wahr ist, so auch $A(n+1)$.*

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem *5. Peano Axiom* für die natürlichen Zahlen, das besagt, dass für jede Menge $X \subseteq \mathbb{N}$ mit

- $1 \in X$
- Für alle $n \in X$ gilt $n+1 \in X$

bereits gilt, dass $X = \mathbb{N}$ gilt.

Nach Voraussetzung erfüllt die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ die obigen Eigenschaften und damit folgt die Aussage. □

Wir wollen nun einige Beispiele für Induktionsbeweise geben:

Satz 5.2 (Gaußsche Summenformel)**.** *Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $n = 1$: Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.3 (Geometrische Summenformel)**.** *Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ und alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}.$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$(1-x)\sum_{k=0}^{1} x^k = (1-x)\cdot(1+x) = 1 - x^2.$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit $(1-x)\sum_{k=1}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$.

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k + (1-x)\cdot x^{n+1} \\ &= (1-x^{n+1}) + x^{n+1} - x^{n+2} = 1 - x^{n+2}.\end{aligned}$$

□

Induktionsbeweise sind dabei nicht beschränkt auf Summen- oder Produktformeln.

Satz 5.4. *Es sei $n \geq 3$. Die Winkelsumme in einem konvexen ebenen n-Eck beträgt $(n-2)\cdot\pi = (n-1)\cdot 180°$*

Beweis. Induktionsanfang: Seien A, B, C die Ecken eines konvexen ebenen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ in den jeweiligen Ecken. Zeichne die Parallele P der Strecke AB an den Punkt C. Verlängere die Seiten BC und AC. Nutze nun Stufen- und Scheitelwinkel und erhalte, dass der gestreckte Winkel definiert durch die Gerade P in C gegeben ist durch $\alpha + \beta + \gamma$, siehe Abbildung 1.

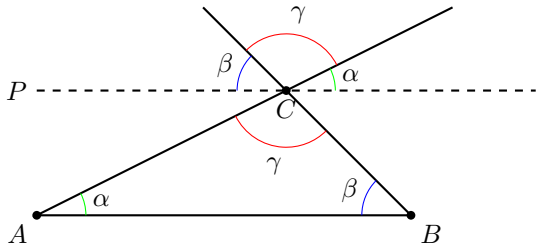


Abbildung 1. Illustrierung im Fall eines Dreiecks

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \geq 3$ so gegeben, dass alle ebenen konvexen n-Ecke eine Winkelsumme von $(n-2) \cdot \pi$ haben.

Induktionsschritt: Sei nun ein $(n+1)$-Eck mit Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ gegeben. Wir zerteilen das $(n+1)$-Eck in das Dreieck $A_1A_2A_3$ und das n-Eck $A_3A_4 \ldots A_{n+1}A_1$, siehe Abbildung 2.

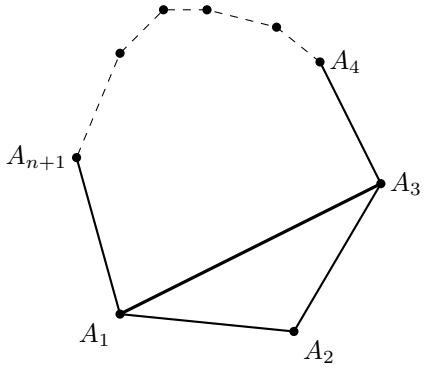


Abbildung 2. Zerlegung eines $(n+1)$-Ecks in ein Dreieck und ein n-Eck

Dann ist die Winkelsumme des gesamten $(n+1)$-Ecks gleich der Winkelsumme des Dreiecks und des n-Ecks, also gleich

$$\pi + (n-2) \cdot \pi = (n-1) \cdot \pi = ((n+1-1)) \cdot \pi.$$

□

Als ein weiteres Beispiel für einen Induktionsbeweis betrachten wir die folgende Ungleichung. Auch hier müssen wir den Induktionsanfang anpassen.

Satz 5.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt*

$$2^n \geq n^2.$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 4$ gilt

$$2^4 = 16 \geq 16 = 4^2.$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit $2^n \geq n^2$.

Induktionsschritt: Dann gilt

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq 2n^2 = n^2 + n \cdot n \geq n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

□

Man beachte, dass die obige Aussage für $n = 3$ falsch ist: es gilt $2^3 = 8 < 9 = 3^2$.

Wir wollen nun auf eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln hinarbeiten. Dazu definieren wir folgende Ausdrücke:

Definition 5.6. (a) *Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die* Fakultät von n *ist definiert als* $\prod_{k=1}^{n} k$.

(b) *Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Der* Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, *gesprochen als n über k, ist definiert als*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Der Binomialkoeffizient hat eine Rolle in der Kombinatorik, der Theorie des Abzählens. Er gibt die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an (Beweis vielleicht später?).

Beispiel 5.7. *Es gilt*

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig gilten weiterhin

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Satz 5.8. *Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Dann gelten*

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) *Falls sogar $k < n$ gilt, so gilt* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Beweis. (a): Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

(b): Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Aufgrund von Satz 5.8 (b) kann man die Binomialkoeffizienten mithilfe des *Pascal'schen Dreiecks* berechnen. In diesem berechnet sich eine neue Zahl als die Summe der beiden schräg darüberliegenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & & & \\
 & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & & & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

Damit zeigen wir nun:

Satz 5.9 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nutzen Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{1} a + \binom{1}{0} b.$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben mit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Induktionsschritt: Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n &= (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.10. *Der binomische Lehrsatz ermöglicht es uns, gewisse Potenzen leichter zu berechnen:*

$$1001^3 = (1000+1)^3 = 1000^3 + 3\cdot 1000^2 + 3\cdot 1000 + 1 = 1.003.003.001.$$

6. Teilbarkeit und Division mit Rest

Definition 6.1. *Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann heißt a ein* Teiler *von b, in Zeichen $a \mid b$, falls es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot c$. Alternative Formulierung: a teilt b.*

Man beachte, dass für rationale und reelle Zahlen das Konzept von Teilbarkeit keine sinnvollen Informationen trägt: Ist $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{Q}$ beliebig, so gilt $b = a \cdot \frac{b}{a}$.

Ähnlich wie bei der kleiner Relation erfüllt die Teilbarkeit eine gewisse Transitivitätsrelation:

Lemma 6.2. *Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \mid b$ und $b \mid c$. Dann gilt auch $a \mid c$.*

Beweis. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \mid b$ und $b \mid c$ gegeben. Nach Definition von Teilbarkeit existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $b = ax$ und $c = by$. Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert

$$c = by = (ax) \cdot y = a \cdot (xy).$$

Also gilt $a \mid c$. □

Falls keine Teilbarkeit vorliegt, können wir immer noch mit Rest dividieren.

Satz 6.3 (Division mit Rest)**.** *Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Dann existieren eindeutige $q, r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = q \cdot b + r \qquad \text{und} \qquad r < b.$$

Beweis. Wähle $q \in \mathbb{Z}$ maximal mit $q \cdot b \leq a$. Gilt sogar $q \cdot b = a$, so setzen wir $r = 0$ und sind fertig.

Andernfalls gilt $a - q \cdot b < b$, denn andernfalls wäre $a - q \cdot b \geq b$, also

$$a - (q+1) \cdot b = a - q \cdot b - b \geq 0 \iff (q+1) \cdot b < a,$$

was im Widerspruch zur Maximalität von q steht.

Seien nun $q, r, q', r' \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r = q' \cdot b + r'$ und $0 \leq r, r' < b$. Ohne Einschränkung sei $r \leq r'$. Dann folgt $r' - r = (q - q') \cdot b$. Wegen $0 \leq r' - r \leq r' < b$ und da alle Vielfachen von b entweder 0 oder $\geq b$ sind folgt

$$r' - r = 0 = (q - q') \cdot b.$$

Daraus folgt aber direkt $r' = r$ und $q' = q$, also ist die Darstellung eindeutig. □

Beispiel 6.4. *Wir teilen 718 mit Rest durch 21 und erhalten*

$$718 = 34 \cdot 21 + 4.$$

Offensichtlich ist jede ganze Zahl durch 1 und sich selbst teilbar. Der Extremfall bekommt einen speziellen Namen:

Definition 6.5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ so, dass 1 und n die einzigen Teiler von n sind. Dann heißt n eine* Primzahl.

Beispiel 6.6. *Die kleinsten Primzahlen sind*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, \ldots$$

Das Finden von Primzahlen ist in der IT-Sicherheit von großer Bedeutung. Beispielsweise ist

$$2^{136.279.841} - 1$$

eine Primzahl.

Lemma 6.7. *Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen Primteiler, d.h. es gibt eine Primzahl p mit $p \mid n$.*

Beweis. Es sei p der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n. Dann hat p nur 1 und p als natürliche Teiler, denn jeder andere Teiler wäre auch ein Teiler von n nach Lemma 6.2 und damit ein kleinerer Teiler als p, was der Wahl von p widersprechen würde. Also ist p eine Primzahl. □

Beispiel 6.8. *Die natürlichen Teiler von $n = 715$ sind gegeben durch $1, 5, 11, 13, 55, 65, 143, 715$. Der kleinste von 1 verschiedene Teiler ist 5 und damit eine Primzahl.*

Satz 6.9 (Euklid)**.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede endliche Liste von Primzahlen unvollständig ist. Seien dazu $p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen.

Betrachte nun $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ lässt N bei Division durch p_i den Rest 1, d.h. N ist durch keines der $p_1, \dots, p_k$ teilbar. Nach Lemma 6.7 besitzt N jedoch einen Primteiler p. Also gilt $p \notin \{p_1, \dots, p_k\}$, d.h. wir haben eine weitere Primzahl gefunden. □

Satz 6.10 (Fundamentalsatz der Arithmetik – Primfaktorzerlegung)**.** *Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Beweis. Wir nutzen Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 2$ ist selbst eine Primzahl und diese Darstellung ist sicher eindeutig.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n > 1$ so, dass alle natürlichen Zahlen k mit $1 < k < n$ sich als bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutiges Produkt von Primzahlen schreiben.
Induktionsschritt: Wir zeigen zunächst die Existenz:
Ist n selbst eine Primzahl, so sind wir fertig. Andernfalls besitzt n nach Lemma 6.7 einen Primteiler p. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ mit $\frac{n}{p} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Insgesamt folgt

$$n = p \cdot \frac{n}{p} = p \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

d.h. n ist ein Produkt von Primzahlen.

Für die Eindeutigkeit nutzen wir die folgende Charakterisierung von Primzahlen: Eine natürliche Zahl $n > 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $n \mid a \cdot b$ schon $n \mid a$ oder $n \mid b$ gilt (dies beweist man in der Algebra oder Zahlentheorie).

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_\ell$ Primzahlen mit

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_\ell.$$

Wir zeigen nun, dass es ein $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gibt mit $q_i = p_1$.

Zunächst teilt p_1 das Produkt $q_1 \cdot \ldots \cdot q_\ell$ und damit q_1 oder $(q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell)$. Falls $p_1 \mid q_1$ gilt, so folgt $p_1 = q_1$, da q_1 als Primzahl nur die Teiler 1 und q_1 hat. Andernfalls teilt p_1 das Produkt $q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell$, also q_2 oder $q_3 \cdot \ldots \cdot q_\ell$. So fortfahrend erhalten die Existenz eines $i \in \{1 \dots, \ell\}$ mit $p_1 = q_i$. Nach Umnummerierung können wir ohne Einschränkung $i = 1$ annehmen. Kürzen liefert dann

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell.$$

Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung auf $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_\ell$ an und erhalten die Behauptung. □

Beispiel 6.11. *Der Beweis des Fundamentalsatz der Arithmetik ist in einem gewissen Sinne konstruktiv. Wir wollen ein konkretes Beispiel zur Illustration durchführen.*

Wir betrachten dazu $n = 2.860$. Wir sehen, dass n durch 2 teilbar ist und schreiben

$$n = 2 \cdot \frac{2.860}{2} = 2 \cdot 1.430.$$

Nun fahren wir mit 1.430 fort. Auch diese Zahl ist durch 2 teilbar und wir schreiben

$$1.430 = 2 \cdot \frac{1.430}{2} = 2 \cdot 715.$$

Wir wissen bereits, dass der kleinste von 1 verschiedene natürliche Teiler von 715 die 5 ist und schreiben

$$715 = 5 \cdot 143.$$

Wir wissen dass die Teiler von 143 auch Teiler von 715 sein müssen. Nun ist 143 nicht durch 5 teilbar aber durch den nächstkleineren Teiler von 715, nämlich 11. Wir schreiben also

$$143 = 11 \cdot 13.$$

Da auch 13 eine Primzahl ist, sind wir fertig und wir erhalten

$$2.860 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13.$$

7. Abbildungen

Definition 7.1. *Es seien X, Y nicht leere Mengen. Eine* Abbildung (Funktion) *f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Wird dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zugeordnet, so schreibt man $f(x) = y$ (sprich f von x). Man schreibt*

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Die Menge X heißt Definitionsbereich *von f, die Menge Y heißt* Wertebereich *von f.*
Die Teilmenge $\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ heißt der Graph *von f.*

Beispiel 7.2. (a) *Eine Funktion wie Sie sie vermutlich in der Schule zu Hauf gesehen haben ist*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 - \frac{\sin(x)}{x^2+1} + e^{3x}. \end{aligned}$$

(Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen werden im Laufe des Vorkurses noch wiederholt.)

(b) *Für jede nichtleere Menge X ist*

$$\begin{aligned} \mathsf{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

eine Abbildung, die identische Abbildung auf X.

(c) *Die in Definition 3.1 eingeführten Verknüpfungen sind Abbildungen. So ist beispielsweise die Addition auf den natürlichen Zahlen eine Abbildung*

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}.$$

(d) *Für kleinen Definitionsbereich gibt man die Bilder der Elemente oft explizit an. Zum Beispiel ist eine Abbildung gegeben durch*

$$\begin{aligned} f : \{1,2,3\} &\to \{\pi, 5, \frac{8}{3}, -9\} \\ 1 \mapsto \frac{8}{3}, \qquad 2 &\mapsto -9, \qquad 3 \mapsto \pi. \end{aligned}$$

(e) *Durch $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ wird keine Abbildung definiert, da $x = 0$ keinen Funktionswert hat. In solchen Fällen kann man oft eine Abbildung erhalten, wenn man die nicht definierten Stellen aus dem Definitionsbereich ausschließt. So ist also beispielsweise eine Abbildung gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(f) *Durch $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \frac{a}{b} \mapsto ab$ wird keine Abbildung definiert, da jedem Element aus dem Definitionsbereich mehrere Elemente aus dem Wertebereich zugeordnet werden, z.B.*

$$1 = \frac{1}{1} \mapsto 1 \cdot 1 = 1, \qquad \text{aber auch} \qquad 1 = \frac{2}{2} \mapsto 2 \cdot 2 = 4.$$

(g) *Damit zwei Funktionen $f : X \to Y, g : X' \to Y'$ gleich sind, müssen gelten:*

$$X = X', \qquad Y = Y', \qquad \forall x \in X : f(x) = g(x).$$

Beispielsweise sind

$$f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \qquad f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2, \qquad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$$

vier verschiedene Funktionen mit derselben Abbildungsvorschrift!

(h) *Funktionen können mittels Fallunterscheidungen definiert werden:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

oder

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(i) *Funktionen können Sprungstellen haben:*

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \qquad \lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Es gelten also beispielsweise

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \qquad \lfloor -2{,}3 \rfloor = -3$$

Funktionen werden in allen Bereichen des Studiums auftauchen:

- Analysis 1: Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Analysis 2: Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Lineare Algebra: *lineare Abbildungen*
- Algebra: Homomorphismen, d.h. strukturerhaltende Abbildungen
- Geometrie: Symmetrien von geometrischen Objekten
- Funktionentheorie: Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

Definition 7.3. *Es seien X, Y nicht leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

(a) *Es sei $A \subseteq X$. Das* Bild *von A unter f ist definiert als die Menge*

$$f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}.$$

(b) *Es sei $B \subseteq Y$. Das* Urbild *von B unter f ist definiert als die Menge*

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Im Fall $B = \{b\}$ schreibt man auch oft

$$f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\}).$$

(Vorsicht, diese Notation werden wir später auch für die Umkehrfunktion nutzen!)

Beispiel 7.4. (a) *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ die Abrundungsfunktion. Es gelten*

$$f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{N}$$

und

$$f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = [2, 5).$$

(b) *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gelten*

$$f^{-1}([4, 9]) = [-3, -2] \cup [2, 3]$$

und

$$f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{1, 4, 9, 16, 25\}.$$

Definition 7.5. *Es seien X, Y nicht leere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(a) *f heißt* injektiv*, falls für alle $x, x' \in X$ gilt: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.*

(b) *f heißt* surjektiv*, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.*

(c) *f heißt* bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Umgangssprachlich ausgedrückt bedeutet bijektiv also, dass auf jedes Element aus dem Wertebereich genau ein Element des Definitionsbereichs abgebildet wird.

Beispiel 7.6. (a) *Die Abrundungsfunktion ist nicht injektiv, aber surjektiv*

(b) *Für jede Menge X ist id_X bijektiv.*

(c) *Bei gleicher Abbildungsvorschrift sind Definitions- und Wertebereich entscheidend für die Injektivität/ Surjektivität von Funktionen. Bei den Beispielen aus Beispiel 7.2 (g) erkennt man:*

- *f_1 ist injektiv, aber nicht surjektiv*
- *f_2 ist weder injektiv noch surjektiv*
- *f_3 ist injektiv und surjektiv*
- *f_4 ist nicht injektiv, aber surjektiv*

Definition 7.7. *Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die* Verkettung/ Komposition $g \circ f$*, gesprochen* g nach f *oder auch* g kringel f*, von f und g ist definiert als die Funktion*

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Beispiel 7.8. (a) *Es sei*

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Z = \{1, 2\}$$

und die Funktionen f und g definiert durch

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3, \qquad g(1) = g(2) = g(3) = 2,\ g(4) = 1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f : \{1, 2, 3\} &\to \{1, 2\} \\ 1 \mapsto 1, \quad 2 &\mapsto 2, \quad 3 \mapsto 2. \end{aligned}$$

(b) *Es seien*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2x + 1 \qquad \text{und } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Dann gilt

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^2 - 2x + 1) + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

Andersherum gilt

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x + 1)^2 - 2 \cdot (x + 1) + 1 = x^2.$$

Zwar ist die Komposition von Abbildungen nicht kommutativ, doch assoziativ:

Satz 7.9. *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für nichtleere Mengen A, B, C, D und Abbildungen $h : A \to B, g : B \to C, f : C \to D$ gilt*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Beweis. Da beide Abbildungen sicher denselben Definitions- und Wertebereich haben (nämlich A bzw. D), müssen wir nur zeigen, dass die Abbildungsvorschriften übereinstimmen, d.h. dass alle Elemente $a \in A$ unter beiden Abbildungen auf dieselben Elemente abgebildet werden. Für alle $a \in A$ gilt tatsächlich

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a))) = f((g \circ h)(a)) = (f \circ (g \circ h))(a).$$

□

Definition 7.10. *Es seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt* Umkehrfunktion/ Umkehrabbildung *von f, falls*

$$f \circ g = \mathsf{id}_Y \qquad \text{und} \qquad g \circ f = \mathsf{id}_X$$

gelten, d.h. für alle $x \in X, y \in Y$ gelten

$$(f \circ g)(y) = y \qquad \text{und} \qquad (g \circ f)(x) = x.$$

In diesem Fall schreiben wir $g = f^{-1}$ (dass diese Notation gerechtfertig ist werden wir am Ende des Abschnitts sehen).

Wie vorher bereits erwähnt ist die Notation für die Umkehrfunktion doppelt belegt und identisch mit der für das Urbild. In der Praxis sollte aber keine Verwirrung entstehen: Während wir die Umkehrfunktion auf einzelne Elemente des Wertebereichs von f anwenden, wenden wir das Urbild auf Teilmengen des Wertebereichs an.

Beispiel 7.11. (a) *Die Umkehrabbildung der Funktion*

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}, \qquad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 1$$

ist gegeben durch

$$g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}, \qquad 1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2.$$

(b) *Die Umkehrfunktion von*

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad x \mapsto x^2$$

ist gegeben durch

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \qquad \mapsto \sqrt{x}.$$

(Die Existenz der Wurzelfunktion wird später genauer begründet!)

(c) *Die Umkehrfunktion von*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad x \mapsto e^x$$

ist gegeben durch

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log(x).$$

(Diese Funktionen werden Sie im Laufe des Vorkurses noch genauer kennenlernen.)

Wir sehen nun, dass Umkehrfunktionen nur für ganz spezielle Abbildungen existieren:

Satz 7.12. *Eine Funktion $f : X \to Y$ hat genau dann eine Umkehrfunktion g, falls f bijektiv ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei g eine Umkehrfunktion zu f. Seien $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Dann gilt

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = x',$$

also ist f injektiv.

Es sei nun $y \in Y$. Dann gilt

$$f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y,$$

d.h. f ist surjektiv.

$\Leftarrow$: Es sei nun f bijektiv. Wir definieren $g : Y \to X$ wie folgt: Zu $y \in Y$ existiert ein eindeutiges $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir setzen $g(y) := x$.

Für alle $x \in X$ gilt dann nach Konstruktion

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

und für alle $y \in Y$ gilt nach Konstruktion

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y,$$

d.h. g ist eine Umkehrfunktion von f. □

Wir zeigen zum Abschluss dieses Abschnitts, dass die Umkehrfunktion, sofern sie existiert, auch eindeutig ist.

Satz 7.13. *Es seien X, Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann existiert genau eine Umkehrfunktion von f.*

Beweis. Es seien $g_1, g_2 : Y \to X$ Umkehrfunktionen von f. Dann gilt

$$g_1 = g_1 \circ \mathsf{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathsf{id}_X \circ g_2 = g_2.$$

□

8. Polynomfunktionen und ihre Nullstellen

Definition 8.1. *Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und X eine Unbestimmte. Ein formaler Ausdruck der Form*

$$p(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

heißt Polynom *Ist $a_n \neq 0$, so heißt a_n der* Leitkoeffizient *von p und n der* Grad von p, *geschrieben als* $\deg(p)$.

Ist $p(x) = 0$, so heißt p das Nullpolynom *und wir definieren* $\deg(p) = -\infty$.

Ist der Leitkoeffizient von p gleich 1, so heißt p normiert.

Für die Menge aller Polynome in der Variablen X schreiben wir $\mathbb{R}[X]$.

Ganz analog kann man auch die Menge der Polynome mit rationalen oder ganzzahligen Koeffizienten betrachten. Diese werden dann analog mit $\mathbb{Q}[X]$ bzw. $\mathbb{Z}[X]$ bezeichnet.

Beispiel 8.2. (a) *$p(X) = X^n$ hat Grad n und Leitkoeffizient 1*

(b) *$p(X) = 3X^2 - 6X + 12$ hat Grad 2 und Leitkoeffizient 3.*

Polynome induzieren Funktionen:

Definition 8.3. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* Polynomfunktion, *falls es ein Polynom $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ gibt mit*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Oft unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen dem Polynom p und der zugehörigen Polynomfunktion.

Definition 8.4. *Es sei p ein Polynom. Gilt $p(a) = 0$, so heißt a eine* Nullstelle von p.

Wir wollen zeigen, dass die Existenz von Nullstellen eine Zerlegung des Polynoms induziert. Dafür benötigen wir die folgende Erweiterung der Division mit Rest.

Satz 8.5 (Polynomdivision)**.** *Es seien p, q Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom sei. Dann existieren Polynome s, r mit*

$$p(X) = s(X) \cdot q(X) + r(X)$$

und $\deg(r) < \deg(q)$.

Beweis. Es sei $\deg(p) = n$ und $\deg(q) = m$. Ist $n < m$, so wählen wir s als Nullpolynom und $r = p$.

Sei nun $m \leq n$. Wir führen eine Induktion nach n. Induktionsanfang: $n = 0$. Dann ist also auch $m = 0$, d.h. es gelten $p(X) = a$ und $q(X) = b$ für gewisse $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir setzen dann $s(X) = \frac{a}{b}$ und $r(X) = 0$.

Induktionsvoraussetzung: Für alle Polynome p vom Grad $< n$ existieren Polynome s, r mit $p(X) = s(X)q(X) + r(X)$ und $\deg(r) < \deg(q)$.

Induktionsschritt: Sei nun p ein Polynom vom Grad n. Es seien

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

und

$$q(X) = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0.$$

Wir betrachten das Polynom $h(X) = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$. Dann gilt

$$p(X) - h(X) \cdot q(X) = \left(\underbrace{a_n - \frac{a_n}{b_m} \cdot b_m}_{=0} \right) \cdot X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} \cdot b_{m-1} \right) \cdot X^{n-1} + \dots,$$

d.h. durch

$$f(X) = p(X) - h(X) \cdot q(X)$$

wird ein Polynom vom Grad $\deg(f) < n$ definiert. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Polynome s, r mit

$$p(X) - h(X) \cdot q(X) = s(X) \cdot q(X) + r(X)$$

und $\deg(r) < \deg(q)$. Umstellen und Ausklammern ergibt

$$p(X) = (s(X) + h(X)) \cdot q(X) + r(X),$$

was den Induktionsschritt vervollständigt. □

Korollar 8.6. *Es sei p ein Polynom mit $\deg(p) = n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von p wenn ein Polynom q vom Grad $\deg(q) = n - 1$ gibt mit $p(X) = (X - a)q(X)$.*

Beweis. Gilt $p(X) = (X - a)q(X)$, so folgt

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) = 0 \cdot q(a) = 0,$$

d.h. a ist eine Nullstelle von p.

Es sei nun a eine Nullstelle von p. Wir teilen p durch $(X-a)$ und erhalten nach Satz 8.5 die Existenz von Polynomen s, r mit $\deg(r) < \deg(X - a) = 1$ und

$$p(X) = s(X) \cdot (X - a) + r(X).$$

Wegen $\deg(r) < 1$ existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $r(X) = c$. Damit gilt

$$0 = p(a) = s(a) \cdot (a - a) + r(a) = c,$$

d.h. die Polynomdivision geht auf. □

Korollar 8.7. *Es sei p ein Polynom mit $\deg(p) = n \in \mathbb{N}_0$. Dann hat p höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Induktion nach n. Induktionsanfang: $n = 0$: In diesem Fall existiert ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $p(X) = c$. Insbesondere existiert keine Nullstelle von p.

Induktionsvorausstzung: Alle Polynome vom Grad n haben höchsten n Nullstellen.

Induktionsschritt: Es sei p ein Polynom vom Grad $n + 1$. Falls p keine Nullstelle hat, sind wir fertig. Andernfalls sei $a \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle. Nach Korollar 8.6 existiert ein Polynom q vom Grad $\deg(q) = n - 1$ mit $p(X) = q(X) \cdot (X - a)$. Nach Satz 4.6 (a) ist x eine Nullstelle von p, wenn $q(x) = 0$ oder $(x - a) = 0$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung hat q höchstens n viele Nullstellen und es gilt $x - a = 0 \iff x = a$. Also hat p höchstens $n + 1$ viele Nullstellen. □

Beispiel 8.8. *Das Polynom $p(X) = x^2 + 1$ ist vom Grad 2, hat aber keine reelle Nullstelle.*

Nachdem wir nun allgemein die Existenz von Nullstellen von Polynomen untersucht haben, behandeln wir nun den Fall von Polynomen kleinen Grads explizit.

Satz 8.9 ($p - q$ Formel)**.** *Es sei $p(X) = X^2 + pX + q$ ein normiertes Polynom vom Grad 2. Es sei $D = \frac{p^2}{4} - q$. Ist $D < 0$, so hat $p(X)$ keine reellen Nullstellen. Andernfalls sind die Nullstellen gegeben durch*

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{D}.$$

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) = x^2 + px + q = 0 &\iff x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = D. \end{aligned}$$

Da Quadrate stets nichtnegativ sind nach Korollar 4.4 (b) folgt, dass es keine Lösung gibt, falls $D < 0$ gilt. Ist $D \geq 0$, so ist obige Gleichung äquivalent zu

$$x + \frac{p}{2} \in \left\{\sqrt{D}, -\sqrt{D}\right\},$$

d.h. die Lösungen sind gegeben durch

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{D},$$

wie behauptet. □

Die Frage nach der Existenz von Lösungsformeln von polynomiellen Gleichungen ist ein klassisches Gebiet der *Algebra*. Tatsächlich gibt es auch Formeln für die Lösungen von polynomiellen Gleichungen vom Grad 3 und 4, diese sind aber komplizierter als die $p-q$ Formel. Es kann gezeigt werden, dass es ab Grad 5 keine Formel mehr gibt, die die Nullstellen eines Polynoms nur in Abhängigkeit von den Koeffizienten angibt (wenn man diese mittels der üblichen Rechenoperationen sowie dem Wurzelziehen miteinander verrechnen kann). Dies wird in der Regel im dritten Semester in der Vorlesung *Algebra 1* bewiesen.

Beispiel 8.10. *Der Beweis von Satz 8.5 liefert ein Berechnungsverfahrung zur Durchführung der Polynomdivison. Für die Polynomfunktionen mit Vorschriften*

$$p(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - X \quad \text{und} \quad q(X) = X^2 - X - 1$$

gilt beispielsweise

$$X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - X = (X^3 - 2X^2 + X + 1) \cdot (X^2 - X - 1) + (X + 1).$$

Satz 8.11 (Satz von Vieta)**.** *Es sei $p(X) = X^2 + pX + q$ ein normiertes Polynom vom Grad 2 mit Nullstellen a, b. Dann gelten $ab = q$ und $p = -(a + b)$.*

Beweis. Sind a, b Nullstellen, so gilt

$$X^2 + pX + q = p(X) = (X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$$

und die Aussage folgt durch Vergleich der Koeffizienten. □

9. Nacharbeiten von Vorlesungen

In diesem Abschnitt wollen wir ein paar Strategien zum Nacharbeiten von Vorlesungen geben und an Beispielen illustrieren.

Wir gehen dazu einige Abschnitte aus der Vorlesung noch mal durch und stellen uns typische Fragen, die man sich beim Durcharbeiten mathematischer Texte stellen sollte.

9.1. **Definitionen.** Definitionen kann man nicht per se „verstehen“ in dem Sinne, dass in diesen keine Argumentationslinien vorhanden sind, die man im Detail nachvollziehen muss wie bei Beweisen (siehe später). In Definitionen wird lediglich festgelegt, was man unter einem gewissen Begriff versteht, was für ein Objekt dies ist und welche Eigenschaften es besitzt. Jeder sinnvollen Definition liegt ein gewisses Konzept zugrunde, das es zu durchdringen gilt. Hierfür bieten sich folgende Ansätze an:

- Was soll umgangssprachlich mit Hilfe des definierten Begriffs modelliert werden? Zum Beispiel:
  - Menge: Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte
  - Körper: Rechenbereich, in dem sich + und · so gut wie nur möglich verhalten
- Zu jeder Definition sollte man einige Beispiele sowie Gegenbeispiele im Kopf haben. In den Vorkursvorlesungen wurden bisher immer zahlreiche Beispiele gegeben, gerade in fortgeschrittenen Vorlesungen wird es üblicherweise nicht mehr so ausführlich gehandhabt. Es lohnt sich daher noch (Gegen-) Beispiele zu finden zu:
  - Aussage (hier kann man den Wahrheitswert von den Aussagen und Verknüpfungen wie und, oder, Implikation etc. bestimmen)
  - Prädikat (hier kann man das Negieren üben)
  - Menge (hier kann man dann auch Vereinigung, Schnitt etc. berechnen)
  - Abbildungen mit verschiedenen Eigenschaften

  Dabei sollte man Beispiele von möglichst unterschiedlicher Bauart finden:
  - ein möglichst kleines Beispiel (für Mengen: $\emptyset, \{1\}$)
  - ein typisches Beispiel, das sehr häufig vorkommt (für Körper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$)
  - möglichst einfaches, aber universelles (id_X für bijektive Abbildungen)

Letztlich bleibt nichts anderes übrig, als Definitionen auswendig zu lernen. Hat man das zugrundeliegende Konzept verstanden, fällt dies in der Regel leichter.

9.2. **Verstehen von Beweisen.**

- Es gibt zwei Arten, Beweise zu verstehen; beide sind wichtig und sollten gleichermaßen verfolgt werden. Als Beispiel betrachten wir den Beweis der Polynomdivison aus Satz 8.5.
  - Einerseits kann man den Beweis auf abstrakter Ebene verstehen und als Bauanleitung auffassen: Wir wollen p durch q teilen und eine Gleichung $p(X) = s(X) \cdot q(X) + r(X)$ erhalten. Um s zu konstruieren, fangen wir beim Term mit dem höchsten Grad an und konstruieren es so, dass es passt und gehen dann zum nächsten Term über.
    Wir haben also die Beweisidee abstrahiert und haben uns noch gar nicht um die nötigen Rechnungen gekümmert.
  - Andererseits kann und muss man sich auch in die Rechnungen hineinbegeben. Man sollte jeden einzelnen Rechen Schritt nachvollziehen und begründen können; dabei kann es sich sowohl um Rechnungen, als auch um wörtlich formulierte Argumente handeln.
- Beim Nacharbeiten von Beweisen sowie beim Lösen von Übungsaufgaben sollte man sich immer fragen, ob alle Voraussetzungen genutzt wurden und an welchen Stellen diese eingehen. In Satz 7.12 zeigen wir beispielsweise, dass eine Funktion genau dann eine Umkehrfunktion besitzt, wenn sie bijektiv ist. Schauen wir uns den Beweis der Richtung $\Leftarrow$ genauer an. Hier setzen wir also voraus, dass f bijektiv ist. Das heißt per Definition, dass f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. In dem Beweis sollten diese Eigenschaften also irgendwo ausgenutzt werden.

  Tatsächlich ist dies bei der Konstruktion der Abbildung g der Fall: Wir definieren $g(y) := x$, wobei x das eindeutige Element $x \in X$ sei mit $f(x) = y$. Dass ein solches Element x überhaupt existiert liegt an der Surjektivität – diese besagt, dass jedes Element ein Urbild ist. Die Eindeutigkeit folgt dabei aus der Injektivität. Ähnlich wie zuvor ist im Beweis auch nicht genau begründet, dass g mit dieser Definition eine Abbildung ist. Tatsächlich wird aber jedem Element y aus dem Definitionsbereich Y ein eindeutiges Element x aus der Bildmenge X zugeordnet.
- Zusätzlich sollte man sich fragen, was in Beweisen schief geht, wenn man eine Voraussetzung nicht erfüllt ist. Hier bietet sich zur Illustration Satz 7.12 an: Man nehme eine Funktion, die

zwar injektiv aber nicht surjektiv ist (oder umgekehrt) und versuche, eine Umkehrabbildung wie im dortigen Beweis zu konstruieren und zu bemerken, was schief geht.

- Beim Nachvollziehen der Beweise sollte man sich immer fragen, ob dem Beweis ein konstruktiver Gedanke zugrundeliegt. Falls dies der Fall ist, lohnt es sich, die Schritte des Beweises an einem konkreten Beispiel durchzugehen. Dies haben wir beispielsweise schon in Beispiel 6.11 getan, als wir eine Primfaktorzerlegung mithilfe des Verfahrens aus dem Beweis des Fundamentalsatz der Arithmetik berechnet haben. Eine andere Stelle, an der dies möglich ist, ist zum Beispiel die Division mit Rest, siehe Satz 6.3, oder auch die Polynomdivision, siehe Satz 8.5.
- Oft wird in Beweise auf vorherige Resultate verwiesen. Man sollte an diesen Stellen immer überprüfen, ob die jeweiligen Voraussetzungen erfüllt sind, um es überhaupt anwenden zu können. In Satz 6.9 verweisen wir beispielsweise auf Lemma 6.7. An dieser Stelle sollte man sich also einmal klarmachen, dass die Zahl N die Voraussetzung des Lemmas erfüllt, also $N > 1$ gilt, was nach Konstruktion der Zahl N direkt ersichtlich ist.
- Hat man zwei ähnliche Aussagen, die aber auf völlig unterschiedliche Art bewiesen werden, sollte man sich fragen, woran das liegt. Dies kann daran liegen, dass der Dozent/ die Dozentin unterschiedliche Techniken vorstellen wollte. In diesem Fall ist es sicher eine gute Übung, die jeweils andere Beweisart selbstständig durchzuführen.

  Es kann aber auch daran liegen, dass die Beweisstrukturen sich nicht übertragen lassen. Hier sollte man dann versuchen herauszufinden, warum diese sich nicht übertragen lassen.

9.3. **Lücken in Beweisen.** Oft werden Beweise nicht in allen Details gegeben, sondern nur die wesentlichen Elemente dargestellt. Dabei ist gar nicht immer direkt ersichtlich, an welchen Stellen abgekürzt wurde, auch wenn es einige Schlagwörter gibt. Auch während der Vorkursvorlesungen sind solche Situtationen aufgetreten. Mit der Zeit sollte man ein Gespür dafür bekommen, wo man noch mal besonders aufpassen sollte:

- Nach Satz 3.10 wurde erwähnt, dass aus den bisher behandelten Rechenregeln die binomischen Formeln leicht folgen. Bewiesen wurde aber nur die erste binomische Formel. Dies sieht man häufig, wenn der Beweis der anderen Aussagen sehr ähnlich verläuft. Eine Herleitung der zweiten binomischen Formel funktioniert etwa so: Seien $a, b \in R$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b)\\ &= (a-b)\cdot a + (a-b)\cdot(-b)\\ &= a\cdot a - b\cdot a + a\cdot(-b) - b\cdot(-b)\\ &= a^2 - ba - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

  Andernfalls kann man die zweite binomische Formel auch direkt auf die erste zurückführen:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a\cdot(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

  Die dritte binomische Formel überlassen wir nun wirklich dem Prozess des Nacharbeitens.
- Oft werden Reduktionsschritte in Beweisen gemacht, um sich auf einen bestimmten Fall zu beschränken. Davon haben wir beispielsweise in Satz 4.11 (b) Gebrauch gemacht, als wir uns auf den Fall $x < 0$ beschränkt haben. Man sollte sich stets klarmachen, warum solche Reduktionen gültig sind. Dies geschieht in der Regel dadurch, dass man zeigt, dass man die zu betrachtenden Fälle auf diesen speziellen zurückführen kann. Oft wird dies durch Stichworte wie *ohne Einschränkung* oder *oBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit)* eingeleitet.

  Im hiesigen Fall ist die Begründung wie folgt: Ist $x < 0$, so gilt $-x > 0$. Haben wir den Fall $x > 0$ bereits bewiesen, so folgt dann der Fall $x < 0$ durch Anwenden des bereits gezeigten auf $-x$, denn dann gilt

$$|-x| = |-(-x)| = |x|,$$

  was zu zeigen war.
- Ganz ähnlich werden einfache Sonderfälle oft nicht im Detail beschrieben, siehe ebenfalls Satz 4.11. In (d) gilt im Fall $x = 0$ beispielsweise auch $xy = 0$ und damit

$$|xy| = |0| = 0 = 0\cdot|y| = |x|\cdot|y|.$$

  Der Fall $y = 0$ verläuft analog – und auch dies ist ein Stichwort, bei dem man genauer hinschauen sollte. Dies ist schon in Teil (d) aufgetaucht, für den Fall $x < 0, y > 0$. Auch

in diesem Fall sollte man schauen, dass man den Beweis auch in diesem Fall einmal für sich aufschreibt. In diesem konkreten Fall ist auch wieder $xy < 0$ und es gilt

$$|xy| = -xy = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

- Oft wird zwar erklärt, welche Schritte vollzogen werden, jedoch keine genaue Begründung gegeben, warum der Schritt so vollzogen werden kann. Betrachten wir dazu wieder die Division mit Rest Satz 6.3. Zu Beginn des Beweises wählen wir $q \in \mathbb{Z}$ maximal mit $q \cdot b \leq a$. Wir begründen aber nicht, warum wir ein solches q überhaupt finden. Dies wollen wir nun nachliefern:

  Angenommen es gäbe kein maximales solches q. Dies kann an zwei Stellen scheitern: Es kann überhaupt kein q geben mit $q \cdot b \leq a$ oder es gibt zwar welche, aber von beliebiger Größe. Wir zeigen zunächst, dass stets ein solches q existiert. Dazu setzen wir $q = -|a|$. Dann gilt

  $$q \cdot b = -|a| \cdot b < -|a| \cdot 1 = -|a| \leq a.$$

  Nun nehmen wir an, es gibt beliebig große q mit $q \cdot b \leq a$. Insbesondere gibt es ein $q > \max\{0, |a|\}$ und es folgt

  $$q \cdot b = |q \cdot b| = |q| \cdot |b| > |a| \cdot 1 = |a| \geq a,$$

  ein Widerspruch.

9.4. **Weitere Techniken.**

- In Beispiel 2.4 (a) wurden Vereinigung und Durchschnitt mittels Venndiagrammen visualisiert. Hier kann man sich folgende Fragen stellen:
  - Wie sehen Visualisierungen von Mengendifferenzen aus?
  - Wie sehen Visualisierungen komplizierterer Verknüpfungen von Mengen aus, z.B. der Durchschnitt von 3 Mengen oder kompliziertere Ausdrücke von mehreren Mengen wie $A \cup (B \cap C)$ aus Lemma 2.6 (a)?

9.5. **Der Blick aufs große Ganze.** Am Ende eines Abschnitts sollte man sich immer fragen, wozu man das ganze gemacht hat. Dazu sind folgende Fragen hilfreich (am Beispiel von Section 8):

- Was waren die wichtigsten Begriffe aus dem Kapitel, welche Objekte haben wir behandelt? Was waren wesentliche Techniken?
  - Polynom
  - Nullstelle
  - Polynomdivision
- Was sind typischen Fragen, die man zu diesen Objekten stellen kann, welche haben wir beantwortet? Was sind die wichtigsten Eigenschaften dieser Objekte?
  - Wie sieht die Menge der Nullstellen aus? Wie viele Nullstellen kann es geben?
  - Wie kann man die Nullstellen berechnen?
- Wie fügt sich das Kapitel in die Vorlesung ein:
  - Auf welche vorherigen Resultate beruhen die aktuellen Ergebnisse?
    In Korollar 8.7 und Satz 8.9 gingen zum Beispiel Resultate aus Section 4 ein: Wann können Produkte 0 sein, Quadrate sind immer positiv.
  - In welcher Art ergänzen Sie das vorherige Wissen?
    Vorher wurden allgemein Abbildungen behandelt, hier geht es nun um eine häufige Klasse von Abbildungen, die man im Detail untersuchen kann.
  - Sobald man einige Wochen weiter ist: wie wurden die Ergebnisse im weiteren Verlauf genutzt, wofür waren sie essentiell?

10. Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Definition 10.1. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine reelle $m \times n$-Matrix ist ein rechteckiges Schema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Wir schreiben kurz

$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Eine $m \times 1$-Matrix nennen wir auch Vektor *der Länge n und schreiben kurz $\mathbb{R}^m$ statt $\mathbb{R}^{m\times 1}$.*

Wir haben die folgende Verknüpfung auf der Menge der Matrizen:

Definition 10.2. *Seien*

$$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad B = (b_{j,k}) \in \mathbb{R}^{n\times p}.$$

Dann ist das Produkt $AB = (c_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le p}$ die $m \times p$-Matrix mit Einträgen

$$c_{i,k} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Beispiel 10.3. *Es gilt*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 0 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Dahingegen gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix},$$

d.h. die Multiplikation von Matrizen ist i.A. nicht kommutativ.

Mit etwas Mühe kann man die folgende Eigenschaft der Matrixmultiplikation nachweisen:

Satz 10.4. *Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ, d.h. für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ gilt*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Definition 10.5. *Die Matrix*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt Einheitsmatrix.

Aus der Definition der Matrixmultiplikation folgt direkt:

Satz 10.6. *Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann gelten*

$$A \cdot I_n = A = I_m \cdot A.$$

Beweis. Es sei $A = (a_{i,j})$ und $A \cdot I_n = (c_{i,j})$. Seien $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Definition gilt

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \delta_{j,k},$$

wobei

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also folgt $c_{i,k} = a_{i,k}$, d.h. $A \cdot I_n = A$. Der Beweis für die andere Gleichung funktioniert ähnlich. □

Korollar 10.7. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Matrixmultiplikation eine assoziative Verknüpfung auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit neutralem Element I_n.*

Definition 10.8. *Ein* lineares Gleichungssystem (LGS) *mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form*

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $a_{1,1}, \dots, a_{m,n}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ seien.

Mittels der oben eingeführten Schreibweise von Matrizen kann man ein LGS auch alternativ darstellen: Mit $A = (a_{i,j}), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ist das obige LGS äquivalent dazu, eine Lösung der Gleichung

$$Ax = b$$

zu finden. Man schreibt kurz $(A \mid b)$.

Wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation ist dies besonders dann einfach, wenn die Matrix A ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzt.

Definition 10.9. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt* invertierbar*, falls es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Die Matrix A^{-1} heißt dann die inverse Matrix *zu A.*

Ist A^{-1} die inverse Matrix zu A, so können wir das LGS $Ax = b$ lösen, indem wir die Gleichung mit A^{-1} multiplizieren; es folgt dann

$$x = I_n \cdot x = (A^{-1} \cdot A)x = A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b.$$

Das dies dann wirklich die einzige Lösung ist, wird in der linearen Algebra gezeigt.

Beispiel 10.10. *Die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Die Lösung des LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \textit{ist damit gegeben durch} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es stellt sich nun also die Frage: Wie berechnen wir inverse Matrizen? Wie können wir lineare Gleichungssysteme lösen, wenn die Matrix nicht invertierbar ist?

Dazu betrachten wir die folgenden Umformumgen:

Satz 10.11. *Die Lösungsmenge eines LGS verändert sich nicht unter den folgenden Operationen:*

(a) *Vertauschen von zwei Gleichungen*
(b) *Multiplikation einer Gleichung mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*
(c) *Addition einer mit $\alpha \in \mathbb{R}$ multiplizierten Gleichung zu einer anderen.*

Beweis. Man mache sich klar, dass die so umgeformten Gleichungen jeweils genau dann lösbar sind, wenn die ursprünglichen Gleichungen lösbar sind. □

Mit den Obigen Umformungen kann man ein LGS immer in die folgende Gestalt bringen, welche sich als sehr günstig zum lösen von LGS erweist:

Definition 10.12. *Ist ein LGS gegeben, in dem bei Betrachtung von unten nach oben in jeder Zeile mindestens eine Variable dazu kommt, so heißt das LGS in* Zeilenstufenform*.*

Wir betrachten nun den folgenden Algorithmus, der ein LGS in Zeilenstufenform bringt:

Algorithmus 10.13 (Gauß)**.** *Gegeben sei ein LGS. Die Anwendung der folgenden Schritte ergibt eine Zeilenstufenform:*

(1) *Vertausche zwei Zeilen, so dass die erste Unbekannte in der ersten Gleichung auftaucht (falls notwendig). Die erste Zeile heißt nun Pivotzeile und die erste Variable Pivotelement.*
(2) *Addiere ein Vielfaches der Pivotzeile zu den Zeilen darunter. Wähle für jede Addition das Vielfache so, dass sich das Pivotelement bei der Addition weghebt.*

(3) *Wähle nun als neue Pivotzeile die Gleichung unter der bisherigen Pivotzeile. Gibt es keine Gleichung unter der bisherigen Pivotzeile, dann Stoppe.*
(4) *Neues Pivotelement wird nun die Variable, die nach dem bisherigen Pivotelement kommt. Ist diese Variable in der Zeile nicht vorhanden, vertausche zwei Zeilen passend.*
(5) *Gehe zu Schritt 2.*

Wir werden den Gauß-Algorithmus nun in zwei Beispielen anwenden und sehen, wie wir aus der Zeilenstufenform die Lösung eines LGS berechnen können. Weiterhin kann man das Gauß-Verfahren etwas verallgemeinern und so ein Rechenverfahren zur Bestimmen der inversen Matrix erhalten. Dies werden wir aus Zeitgründen nicht mehr behandeln.

Beispiel 10.14. (a) *Wir betrachten das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3, \\ 2x + 5y + z &= 14, \\ x + y + z &= 5. \end{aligned}$$

Wir nutzen die Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Wir addieren das -2-fache der ersten Zeile auf die zweite und das -1-fache der ersten Zeile auf die dritte Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Nun addieren wir die zweite Zeile zur dritten und es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Zeile folgt

$$5z = 10 \quad \Longrightarrow \quad z = 2.$$

Aus der zweiten Zeile folgt

$$y + 3z = 8 \quad \Longrightarrow \quad y = 2.$$

Schließlich liefert die erste Zeile

$$x + 2y - z = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.$$

Somit ist die eindeutige Lösung

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 2, 2)}.$$

Man kann sich auch klarmachen, dass die inverse Matrix zur Koeffizientenmatrix A gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *Wir betrachten das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ y + z &= 2. \end{aligned}$$

Dieses ist bereits in Zeilenstufenform. Wir können aber nicht durch Rückwärtseinsetzen nach und nach eindeutige Lösungen bestimmen, sondern bekommen Lösungen in Abhängigkeit von einer der Variablen:

Aus der unteren Gleichung folgt also $y = z-2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann

$$1 = x + y - z = x + (z-2) - z = x - 2 \iff x = 3.$$

Damit sind alle Lösungen gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z-2 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man kann diese Lösungsmenge auffassen als eine Gerade im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$.

Ziel der Anfängervorlesung lineare Algebra wird es sein, die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen ganz allgemein zu verstehen, insbesondere in Bezug auf ihre geometrische Struktur.

11. Grundlagen der Analysis

11.1. **Kurvendiskussion und Ableitung aus der Schule.** In den kommenden Vorlesungen wollen wir zentrale Inhalte der Analysis wiederholen und zugleich mathematisch präziser fassen. Wir beginnen dabei bewusst mit dem aus der Schule bekannten Zugang, und verwenden Ableitungen und Ableitungsregeln zunächst, ohne sie formal herzuleiten. In den folgenden Kapiteln werden wir dann klären, was ein Grenzwert und eine Ableitung genau sind und warum die bekannten Regeln tatsächlich gelten.
Die Ableitung als Steigung. Die Ableitung einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem gegebenenfalls unbeschränkten offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ beschreibt anschaulich die Steigung ihres Graphen in einem Punkt $x_0 \in I$, heuristisch also die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$; siehe die grüne Linie in Abbildung 3. Mathematisch greifbar machen wir diese Steigung, indem wir die Tangente durch Sekanten approximieren.

Betrachten wir dazu für ein kleines $h > 0$ die beiden Punkte

$$(x_0, f(x_0)) \qquad \text{und} \qquad (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

auf dem Graphen von f. Die Gerade durch diese beiden Punkte heißt *Sekante*. Ihre Steigung beträgt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(warum?).

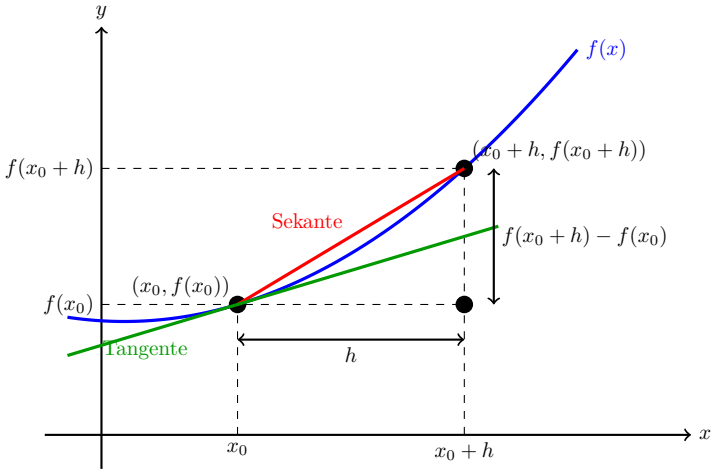


Abbildung 3. Sekante und Tangente am Graphen einer Funktion f. Für $h \to 0$ nähert sich die Sekante der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

Wenn h immer kleiner wird, nähert sich die Sekante anschaulich der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an. Dies führt später zur präzisen Definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Für den Moment verstehen wir $f'(x_0)$ lediglich als die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
Bekannte Ableitungsregeln. Wir erinnern an die aus der Schule bekannten Rechenregeln. Für geeignete Funktionen f, g und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned}
(f + g)' &= f' + g', \\
(af)' &= af', \\
(fg)' &= f'g + fg', \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}, \\
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad (e^x)' = e^x.$$

Diese Regeln werden wir nicht dauerhaft als "Schulwissen" voraussetzen. Ein zentrales Ziel der nächsten Kapitel ist es, mehrere von ihnen aus der Definition der Ableitung herzuleiten.

Kurvendiskussion. Bei einer klassischen Kurvendiskussion interessieren wir uns insbesondere für

- **Nullstellen:** Wir bestimmen alle x aus dem Definitionsbereich, für die
$$f(x) = 0$$
gilt. Dies sind die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse.
- **Symmetrien:** Wir untersuchen insbesondere, ob
$$f(-x) = f(x) \qquad \text{oder} \qquad f(-x) = -f(x)$$
gilt. Im ersten Fall ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse und man nennt f gerade, im zweiten Fall ist punktsymmetrisch zum Ursprung und f ungerade.
- **Monotonie:** Mithilfe der ersten Ableitung untersuchen wir, auf welchen Intervallen die Funktion wächst oder fällt. Dabei gilt für Intervalle $J \subseteq I$
$$f'(x) > 0 \ \forall x \in J \quad \Longrightarrow \quad f \text{ wächst auf } J,$$
$$f'(x) < 0 \ \forall x \in J \quad \Longrightarrow \quad f \text{ fällt auf } J.$$
- **Extremstellen:** Wir suchen nach lokalen und globalen Minima und Maxima. Besitzt eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, so gilt notwendigerweise
$$f'(x_0) = 0.$$
Ob tatsächlich ein Minimum oder Maximum vorliegt, kann etwa durch einen Vorzeichenwechsel von f' oder mithilfe der zweiten Ableitung untersucht werden.
- **Wendestellen:** Eine Wendestelle ist eine Stelle, an der sich das Krümmungsverhalten des Graphen ändert. Kandidaten dafür sind insbesondere Nullstellen der zweiten Ableitung,
$$f''(x_0) = 0.$$
Entscheidend ist, ob f'' an x_0 tatsächlich das Vorzeichen wechselt.
- **Verhalten am Rand des Definitionsbereichs:** Wir untersuchen das Verhalten von $f(x)$, wenn sich x den Randpunkten des Definitionsbereichs nähert. Bei unbeschränktem Definitionsbereich betrachten wir insbesondere
$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x),$$
sofern diese Grenzwerte sinnvoll sind.

Beispiel 11.1. *Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*
$$f(x) = xe^{-x^2} = x\exp(-x^2)$$
und wollen ihren Graphen mithilfe einer Kurvendiskussion untersuchen.

Nullstellen. Da $\exp(-x^2) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist
$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$
Die einzige Nullstelle ist also $x = 0$.

Symmetrie. Wegen
$$f(-x) = (-x)\exp(-(-x)^2) = -x\exp(-x^2) = -f(x)$$
ist f punktsymmetrisch zum Ursprung. Man nennt eine solche Funktion auch *ungerade*.

Erste Ableitung und Extremstellen. Für die Berechnung der Ableitung benötigen wir sowohl die Produktregel als auch die Kettenregel. Es gilt
$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(-x^2) + x\exp(-x^2)(-2x) \\ &= \exp(-x^2)(1 - 2x^2). \end{aligned}$$
Da der Exponentialfaktor stets positiv ist, wird das Vorzeichen von $f'(x)$ allein durch $1-2x^2$ bestimmt. Die Nullstellen der Ableitung sind
$$1 - 2x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es gilt

$$f'(x)\begin{cases} <0, & x<-\frac{1}{\sqrt{2}},\\ >0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},\\ <0, & x>\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Somit ist f auf

$$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$$

streng fallend und auf

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

streng wachsend. Folglich besitzt f bei $x=-1/\sqrt{2}$ ein lokales Minimum und bei $x=1/\sqrt{2}$ ein lokales Maximum. Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Zweite Ableitung und Krümmung. Nochmals mit Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp(-x^2)(-4x)+(1-2x^2)\exp(-x^2)(-2x)\\ &= \exp(-x^2)(4x^3-6x)\\ &= 2x\exp(-x^2)(2x^2-3). \end{aligned}$$

Da wiederum $\exp(-x^2)>0$ gilt, sind die Nullstellen von f'' gegeben durch

$$x=0 \qquad \text{und} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

An diesen drei Stellen ändert f'' jeweils sein Vorzeichen. Daher besitzt f die drei Wendestellen

$$-\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad 0, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Verhalten im Unendlichen. Die Exponentialfunktion $\exp(-x^2)$ fällt für $|x|\to\infty$ schneller gegen null, als der Faktor $|x|$ wächst (das werden wir später formal nachweisen). Daher gilt

$$\lim_{x\to\infty} x\exp(-x^2)=0, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\exp(-x^2)=0.$$

Der Graph nähert sich somit für $x\to\pm\infty$ der x-Achse an.

Graph von f. Die folgende Abbildung zeigt die Funktion gemeinsam mit ihrer ersten Ableitung. Insbesondere erkennt man, dass die Nullstellen von f' genau mit den Extremstellen von f übereinstimmen.

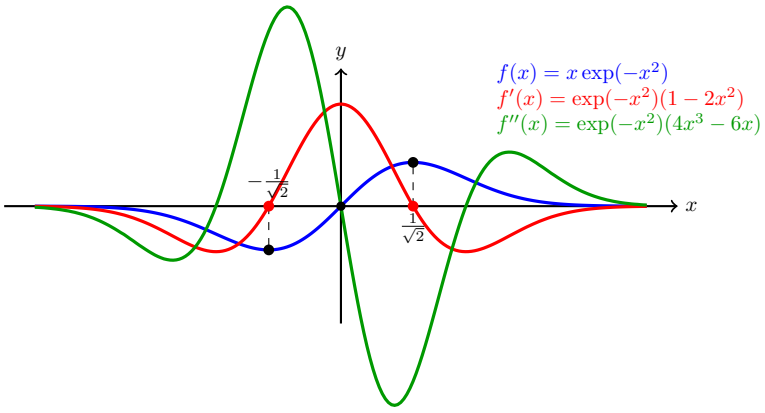


ABBILDUNG 4. Graph der Funktion $f(x)=x\exp(-x^2)$ sowie ihrer ersten und zweiten Ableitung. Die Nullstellen von f' bei $x=\pm 1/\sqrt{2}$ entsprechen den beiden Extremstellen von f.

Beispiel 11.2 (Rechteck mit gegebenem Umfang)**.** *Sei $r > 0$. Welches Rechteck mit Umfang r hat den größten Flächeninhalt?*

Lösung 1: Sind p, q die Seitenlängen des Rechtecks, so gilt $2(p+q) = r$. Daher ist $q = r/2 - p$ und die Fläche lautet

$$A(p) = p\left(\frac{r}{2} - p\right) = -p^2 + \frac{r}{2}p.$$

Wegen $p, q > 0$ müssen wir die Funktion nur für p im Intervall $(0, r/2)$ untersuchen. Für die Untersuchung von Extremstellen betrachten wir die ersten beiden Ableitungen

$$A'(p) = -2p + \frac{r}{2}, \qquad A''(p) = -2.$$

Die einzige Nullstelle von A' ist $p = r/4$. Da $A''(r/4) < 0$, liegt dort ein lokales Maximum. Aus

$$A'(p) > 0 \quad \text{für } p < \frac{r}{4}, \qquad A'(p) < 0 \quad \text{für } p > \frac{r}{4}$$

folgt sogar, dass es sich um das globale Maximum auf $[0, r/2]$ handelt. Schließlich gilt für das zugehörige $q = r/2 - p = r/2 - r/4 = r/4$. Das flächenmaximale Rechteck ist also ein Quadrat; sein Flächeninhalt beträgt $A(r/4) = r^2/16$.

Lösung 2: wie bei Lösung 1 gilt

$$A(p) = p\left(\frac{r}{2} - p\right) = -p^2 + \frac{r}{2}p.$$

Mit der Nulladdition $\pm r^2/16$ und der zweiten binomischen Formel erhalten wir

$$A(p) = -\left(p^2 - \frac{r}{2}p + \frac{r^2}{16}\right) + \frac{r^2}{16} = -\left(p - \frac{r}{4}\right)^2 + \frac{r^2}{16}.$$

Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist der Ausdruck rechts kleiner oder gleich $r^2/16$, und er nimmt den Maximalwert $r^2/16$ genau dann an, wenn $p = r/4$. Wir erhalten also wieder ein Quadrat als flächenmaximales Rechteck.

11.2. **Folgen und Konvergenz.** Um Ableitungen mathematisch präzise definieren zu können, benötigen wir zunächst einen der zentralen Begriffe der Analysis: den Begriff des Grenzwerts. Er beschreibt, was es bedeutet, dass sich eine Größe einem bestimmten Wert beliebig weit annähert. Auf dem Grenzwertbegriff bauen unter anderem die Konzepte der Stetigkeit, der Ableitung und des Integrals auf. Auch wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen lassen sich mithilfe von Grenzwerten definieren.

Am einfachsten lässt sich der Grenzwertbegriff zunächst für *Folgen reeller Zahlen* einführen. Bereits in diesem einfachen Rahmen werden wesentliche Phänomene deutlich; zugleich lassen sich weiterführende Grenzwertbegriffe auf den Grenzwert von Folgen zurückführen.

Definition 11.3. *Eine* Folge reeller Zahlen *ist eine Abbildung*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Für Folgen verwendet man eine besondere Schreibweise: Anstelle von $a(n)$ schreiben wir a_n und bezeichnen die Folge selbst mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch (a_n) statt mit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Beispiel 11.4. *Beispiele für Folgen sind*

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = (-1)^n, \qquad c_n = \frac{n}{3}, \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad e_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)}.$$

Folgen können auch rekursiv definiert werden. Ein bekanntes Beispiel ist die Heron-Folge

$$f_1 = 1, \qquad f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{2}{f_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ihre ersten Folgenglieder sind

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}, \quad \dots$$

Folgen lassen sich ähnlich wie Funktionen grafisch darstellen, indem die Folgenglieder a_n als Punkte (n, a_n) in ein Koordinatensystem eingetragen werden; siehe Abbildung 5. Anschaulich nähert sich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer weiter der Zahl 0 an. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wechselt dagegen zwischen -1 und 1 und nähert sich keinem einzelnen Wert an, während $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbegrenzt wächst. Bei den Folgen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist das Verhalten auf den ersten Blick weniger offensichtlich. Wir werden später zeigen, dass d_n unbegrenzt wächst, während sich e_n der Zahl 3 und f_n der Zahl $\sqrt{2}$ annähern.

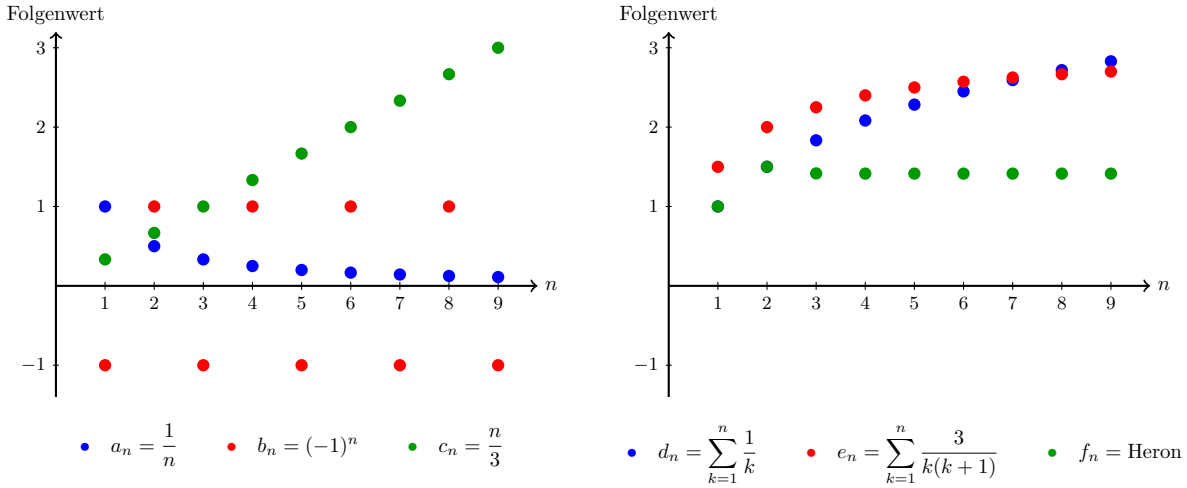


ABBILDUNG 5. Beispiele für Folgen reeller Zahlen mit unterschiedlichem Konvergenzverhalten.

Definition 11.5. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, *falls für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ *gilt. In diesem Fall schreiben wir*

$$a_n \to a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Mathematisch kompakt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge heißt divergent, *falls sie nicht konvergiert. Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen $+\infty$, *falls für jedes* $K \in \mathbb{R}$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$a_n > K$$

für alle $n \geq N$ *gilt. Wir schreiben in diesem Fall*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Analog definiert man die Divergenz gegen $-\infty$ *(nämlich wie genau?).*

Beispiel 11.6. *Die konstante Folge* $a_n = a$ *konvergiert gegen* a.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Wir können also beispielsweise $N = 1$ wählen. Damit gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Beispiel 11.7. *Die Folge* $a_n = 1/n$ *konvergiert gegen* 0.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$; das geht nach dem Archimedischen Axiom, und konkret können wir $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$ wählen. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 11.8. *Die Folge* $a_n = (-1)^n$ *konvergiert nicht.*

Beweis. Angenommen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq N$ gilt. Wir können ein gerades $n \geq N$ und ein ungerades $m \geq N$ wählen. Dann gilt $a_n = 1$ und $a_m = -1$, also erhalten wie sowohl

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad |-1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$2 = |1 - a + (a + 1)| \leq |1 - a| + |a + 1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ein Widerspruch. Somit konvergiert die Folge nicht. □

Beispiel 11.9. *Die Folge $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert gegen $+\infty$. Man nennt den Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ auch* harmonische Reihe*.*

Beweis. Wir gruppieren die Summanden in Blöcke: für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2^m} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Jede geschweifte Klammer definiert dabei einen Block, und insgesamt gibt es m Blöcke. Im j-ten Block gibt es 2^{j-1} Summanden, und jeder davon ist mindestens $\frac{1}{2^j}$. Daher ist die Summe in jedem dieser Blöcke mindestens $\frac{1}{2}$. Somit gilt

$$a_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Sei nun $K > 0$ beliebig. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$1 + \frac{m}{2} > K$$

(Archimedisches Axiom). Für $N = 2^m$ gilt dann für alle $n \geq N$

$$a_n \geq a_{2^m} > K,$$

was zu zeigen war. □

Lemma 11.10 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen, a und b seien beide Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und dabei gelte $a \neq b$. Setze nun $\varepsilon = |a - b|/4$; nach unserer Annahme gilt dann $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to a$, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_1.$$

Ebenso gibt es wegen $a_n \to b$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_2.$$

Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ liefert die Dreiecksungleichung

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$$

Division durch $|a - b|$ liefert den Widerspruch $1 < 1/2$, so dass unserer Annahme $a \neq b$ falsch sein muss. □

Satz 11.11 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Es seien $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt*

$$a_n + b_n \to a + b \qquad \textit{und} \qquad a_n b_n \to ab.$$

Falls zusätzlich $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für hinreichend große n, so gilt

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Summe. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_1), \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq N_2).$$

Für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ folgt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

Für die Produktregel benötigen wir zunächst eine einfache Beobachtung: Jede konvergente Folge ist beschränkt, und wir verwenden das später für $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tatsächlich existiert wegen $b_n \to b$ ein $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < 1$ für alle $n \geq N_b$, also $|b_n| = |b_n - b + b| \leq |b| + 1$ für alle $n \geq N_b$. Mit $M := \max(|b_1|, \ldots, |b_{N_b}|, |b| + 1)$ gilt also $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es folgt daher mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\leq |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \\ &\leq M|a_n - a| + |a|\,|b_n - b|. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gibt es $\bar{N}_1, \bar{N}_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\forall n \geq \bar{N}_1), \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \quad (\forall n \geq \bar{N}_2).$$

Für $n \geq \bar{N} := \max\{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}$ folgt

$$|a_n b_n - ab| \leq M|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|}{|a| + 1}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Wir verzichten auf einen Beweis der Quotientenregel. □

Beispiel 11.12. *Die Folge*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)}$$

konvergiert gegen 3.

Beweis. Wegen

$$\frac{3}{k(k+1)} = 3\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

gilt

$$a_n = 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

(warum?) folgt mit der Summen- und Produktregel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) = 3(1 - 0) = 3.$$

□

Für die Untersuchung der Heron-Folge benötigen wir ein grundlegendes Konvergenzkriterium aus der Analysis, welches wir hier nicht beweisen können.

Satz 11.13. *Ist $(a_n)_n$ eine monotone reelle Zahlenfolge (das heißt, es gilt entweder $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, oder $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$), die zusätzlich beschränkt ist (das heißt, es existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$), so ist $(a_n)_n$ konvergent.*

Das Kriterium macht zugleich einen wesentlichen Unterschied zwischen den reellen und den rationalen Zahlen deutlich: Eine monotone und beschränkte Folge rationaler Zahlen muss nämlich keinen rationalen Grenzwert besitzen. Genau dies zeigt das Beispiel der Heron-Folge, wie wir im Folgenden sehen werden.

Beispiel 11.14 (Heron-Folge)**.** *Die rekursiv definierte Heron-Folge*

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

konvergiert gegen $\sqrt{2}$*.*

Beweis. Zunächst gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \geq 0.$$

Damit folgt

$$a_n \geq \sqrt{2} \qquad \text{für alle } n \geq 2.$$

Für $n \geq 2$ gilt daher

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

Die Folge ist also ab dem zweiten Folgenglied monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{2}$ beschränkt. Nach dem Konvergenzkriterium für monotone und beschränkte Folgen existiert daher ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Wegen $a_n \geq \sqrt{2}$ für $n \geq 2$, kann der Grenzwert a nicht gleich 0 sein (warum?). Weiterhin ist die Folge $b_n = a_{n+1}$ ebenfalls konvergent mit Grenzwert a (warum?). Aus der Rekursionsgleichung, der Eindeutigkeit des Grenzwerts, und den Rechenregeln für konvergente Folgen folgt daher

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

Multiplikation mit $2a$ liefert

$$2a^2 = a^2 + 2,$$

und damit $a^2 = 2$. Somit gilt $a = \sqrt{2}$ oder $a = -\sqrt{2}$. Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann der zweite Fall nicht eintreten (warum?). Folglich ist $a = \sqrt{2}$. □

Für den Abschluss über Folgen halten wir noch ein Resultat fest, das intuitiv und gleichzeitig sehr nützlich ist.

Lemma 11.15 (Sandwich-Lemma)**.** *Es seien* $(a_n), (b_n), (c_n)$ *Folgen mit*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

für alle hinreichend großen n *(das heißt, für alle* $n \geq N_0$ *mit einem festen* $N_0 \in \mathbb{N}$*). Falls*

$$a_n \to a \qquad \textit{und} \qquad c_n \to a,$$

so gilt auch

$$b_n \to a.$$

Beweis. Übung. □

Beispielsweise folgt daraus direkt die im Beweis von Beispiel 11.12 verwendete Konvergenz von $b_n = 1/(n+1)$ gegen 0. In der Tat gilt mit

$$a_n = 0, \qquad c_n = \frac{1}{n},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Da sowohl (a_n) als auch (c_n) gegen 0 konvergieren, folgt aus dem Sandwich-Lemma, dass auch $b_n \to 0$.

Beispiel 11.16. *Konvergiert* $a_n > 0$ *gegen eine positive Zahl* $a > 0$*, so konvergiert* $\sqrt{a_n}$ *gegen* $\sqrt{a}$*.*

Beweis. Mit der dritten binomischen Formel erhalten wir

$$a_n - a = (\sqrt{a_n})^2 - (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}).$$

Daher gilt

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Da $a_n \to a$, konvergiert die rechte Seite gegen 0. Nach dem Sandwich-Lemma konvergiert also $|\sqrt{a}_n - \sqrt{a}|$ gegen 0, und das ist gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sqrt{a}_n$ gegen $\sqrt{a}$. □

11.3. **Grenzwerte von Funktionen und Differenzierbarkeit.** Bisher haben wir nur den Grenzwert einer Folge definiert. Für die Differentialrechnung benötigen wir aber Ausdrücke wie

$$\lim_{h \to 0} g(h).$$

Wir führen diesen Grenzwert mithilfe von Folgen auf den bereits bekannten Grenzwertbegriff zurück.

Definition 11.17 (Grenzwert einer Funktion)**.** *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und g eine reellwertige Funktion, die zumindest auf $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ definiert ist. Wir sagen, dass $g(x)$ für $x \to x_0$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*

$$x_n \longrightarrow x_0$$

auch

$$g(x_n) \longrightarrow a$$

gilt. Wir schreiben dann

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

Für die Definition der Ableitung werden wir fast ausschließlich den Fall $x_0 = 0$ verwenden. Die Aussage

$$\lim_{h \to 0} g(h) = a$$

bedeutet dann also genau: Für *jede* Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n \neq 0$ und $h_n \to 0$ gilt $g(h_n) \to a$.

Bemerkung 11.18. *Der Wert $g(x_0)$ spielt für den Grenzwert $\lim_{x \to x_0} g(x)$ keine Rolle; die Funktion muss in x_0 nicht einmal definiert sein. Entscheidend ist nur das Verhalten von $g(x)$ für x nahe bei x_0.*

Tatsächlich ist es auch nicht notwendig, dass g auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ definiert ist. Es genügt, dass g auf $I \setminus \{x_0\}$ definiert ist, wobei I ein offenes Intervall mit $x_0 \in I$ ist. Die obige Definition lässt sich auf diesen Fall unmittelbar übertragen.

Beispiel 11.19. *Die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

erfüllen

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$$

existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 0} h(x)$ hingegen nicht.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \neq 0$ und $x_n \to 0$. Dann gilt

$$f(x_n) = x_n \to 0 \qquad \text{und} \qquad g(x_n) = x_n \to 0.$$

Daraus folgen die Aussagen bzgl. f und g. Für h betrachten wir dagegen die beiden Folgen

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad y_n = -\frac{1}{n}.$$

Beide konvergieren gegen 0 und sind stets von 0 verschieden. Es gilt jedoch

$$h(x_n) = \frac{1}{n} \to 0, \qquad h(y_n) = 1 \to 1.$$

Daher kann $\lim_{x \to 0} h(x)$ nicht existieren. □

Lemma 11.20 (Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte)**.** *Es seien*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$$

und

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$

Ist zusätzlich $b \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ für x hinreichend nahe bei x_0, so gilt auch

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Sei (x_n) eine beliebige Folge im gemeinsamen Definitionsbereich von f und g mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x_n) \to a, \qquad g(x_n) \to b.$$

Die bereits bewiesenen Rechenregeln für Folgen liefern daher

$$f(x_n) + g(x_n) \to a + b, \qquad f(x_n)g(x_n) \to ab,$$

und im Fall $b \neq 0$ auch

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{a}{b}.$$

Da (x_n) beliebig gewählt war, folgen die Behauptungen unmittelbar aus der Definition des Funktionsgrenzwertes. □

Übung 11.21. *Analog zu Lemma 11.15 gilt ein Sandwich-Kriterium für Funktionsgrenzwerte. Formulieren Sie ein solches Kriterium und beweisen Sie es.*

Mit dem Grenzwert einer Funktion können wir nun die intuitive Vorstellung von der Steigung einer Tangente mathematisch präzise fassen; wir verweisen dazu auch erneut auf Abbildung 3.

Definition 11.22. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $h \neq 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten*

$$g(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0*, falls der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} g(h)$$

existiert. In diesem Fall heißt

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

die Ableitung von f in x_0*. Nach der Definition des Funktionsgrenzwertes bedeutet dies äquivalent: Für jede Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n \neq 0$ und $h_n \to 0$ gilt*

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \longrightarrow f'(x_0).$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf $I \subseteq \mathbb{R}$*, falls sie in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.*

Wie beim Funktionsgrenzwert kann auch hier der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ von f durch ein beliebiges offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ ersetzt

Beispiel 11.23. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x,$$

ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x_0) = 1.$$

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{x_0+h-x_0}{h} = 1.$$

Da die konstante Funktion $g(h) = 1$ für $h \to 0$ gegen 1 konvergiert, folgt

$$f'(x_0) = 1.$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist f in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. □

Beispiel 11.24. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^m,$$

ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x_0) = m x_0^{m-1}.$$

Beweis. Den Fall $m = 1$ haben wir bereits betrachtet. Auch der Fall $m = 2$ ist elementar: Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Daher

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 2x_0,$$

also $f'(x_0) = 2x_0$.

Nun sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit der binomischen Formel erhalten wir

$$(x_0+h)^m = x_0^m + m x_0^{m-1} h + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} h^k.$$

Für $h \neq 0$ folgt daher

$$\frac{(x_0+h)^m - x_0^m}{h} = m x_0^{m-1} + \sum_{k=2}^{m} \binom{m}{k} x_0^{m-k} h^{k-1}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert jeder Summand in der Summe gegen 0. Mit den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte folgt somit

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^m - x_0^m}{h} = m x_0^{m-1}.$$

Also ist f in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und

$$f'(x_0) = m x_0^{m-1}.$$

□

Beispiel 11.25. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = |x|,$$

ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Beweis. Für $h \neq 0$ ist der Differenzenquotient in $x_0 = 0$ gegeben durch

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Betrachten wir die beiden Folgen

$$h_n = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}_n = -\frac{1}{n},$$

so konvergieren beide gegen 0, es gilt jedoch

$$\frac{|h_n|}{h_n} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{|\tilde{h}_n|}{\tilde{h}_n} = -1.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

existiert daher nicht, und somit ist f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. □

Übung 11.26. *Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist in jedem $x_0 > 0$ differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Verwenden Sie einen ähnlichen Trick wie in Beispiel 11.16.

Satz 11.27 (Summen- und Produktregel für Ableitungen)**.** *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind auch $f + g$ und fg in x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

sowie

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Beweis. Für die Summe gilt

$$\frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergieren die beiden Terme auf der rechten Seite gegen $f'(x_0)$ bzw. $g'(x_0)$. Mit den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte folgt daher

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Für das Produkt addieren und subtrahieren wir $f(x_0)g(x_0 + h)$:

$$\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0 + h) + f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}. \tag{2}$$

Dabei gilt

$$g(x_0 + h) \longrightarrow g(x_0) \qquad (h \to 0).$$

In der Tat ist

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = h\, \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h},$$

und die rechte Seite konvergiert gegen 0, da

$$h \to 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \to g'(x_0),$$

so dass $g(x_0 + h) = g(x_0 + h) - g(x_0) + g(x_0) \to g(x_0)$. Mit den Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte konvergiert demnach die rechte Seite von (2) gegen

$$f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Damit folgt die Produktregel. □

Mit der Produktregel können wir die Potenzregel auf eine zweite Weise beweisen.

Korollar 11.28. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über m. Für $m = 1$ gilt

$$(x)' = 1.$$

Angenommen, die Behauptung gilt für ein $m \in \mathbb{N}$, das heißt,

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

Dann liefert die Produktregel

$$(x^{m+1})' = (x^m \cdot x)' = mx^{m-1}x + x^m = (m + 1)x^m.$$

Damit folgt die Behauptung für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Satz 11.29 (Kettenregel)**.** *Seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Beweis. Sei (h_n) eine beliebige Folge mit $h_n \neq 0$ und $h_n \to 0$, und setze

$$k_n := g(x_0 + h_n) - g(x_0).$$

Wegen

$$k_n = h_n \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n}$$

und der Differenzierbarkeit von g gilt $k_n \to 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $k_n \neq 0$ für alle n gilt. Dann ist

$$\frac{f(g(x_0 + h_n)) - f(g(x_0))}{h_n} = \frac{f(g(x_0) + k_n) - f(g(x_0))}{k_n} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n}.$$

Wegen $k_n \to 0$ und der Differenzierbarkeit von f in $g(x_0)$ konvergiert der erste Faktor gegen $f'(g(x_0))$. Der zweite Faktor konvergiert wegen der Differenzierbarkeit von g in x_0 gegen $g'(x_0)$. Somit folgt

$$\frac{f(g(x_0 + h_n)) - f(g(x_0))}{h_n} \longrightarrow f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Mit etwas zusätzlichem technischen Aufwand lässt sich der Beweis auch auf Folgen übertragen, für die $k_n = 0$ für einzelne oder mehrere Indizes n gilt. Darauf verzichten wir an dieser Stelle. □

Satz 11.30 (Quotientenregel)**.** *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. Übung. □

Beispiel 11.31. *Betrachten wir zunächst die Funktion*

$$f(x) = (x^2 + 4)^6.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$f'(x) = 6(x^2 + 4)^5 \cdot 2x = 12x(x^2 + 4)^5.$$

Für die Funktion

$$g(x) = e^{x^2+1}$$

ergibt sich

$$g'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}.$$

11.4. **Extremwerte und Monotonieverhalten.**

Definition 11.32. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt* lokales Minimum*, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$f(x_0) \leq f(x)$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Lokale Maxima werden analog definiert.

Satz 11.33 (Fermat, notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Ist f in x_0 differenzierbar und besitzt f dort ein lokales Extremum, so gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall eines lokalen Minimums in x_0; für ein Maximum argumentiert man analog. Da I ein offenes Intervall ist, können wir $\delta > 0$ so klein wählen, dass

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$$

und

$$f(x_0) \leq f(x)$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Betrachte die Folgen

$$h_n = \frac{\delta}{2n}, \qquad \tilde{h}_n = -\frac{\delta}{2n}.$$

Beide konvergieren gegen 0, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_0 + h_n,\ x_0 + \tilde{h}_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Aus der Minimalität von x_0 folgt daher

$$f(x_0 + h_n) - f(x_0) \geq 0.$$

Da $h_n > 0$, gilt somit

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geq 0.$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f konvergiert die linke Seite gegen $f'(x_0)$. Da alle Folgenglieder für nichtnegativ sind, muss auch

$$f'(x_0) \geq 0$$

gelten (warum?).

Andererseits ist

$$f(x_0 + \tilde{h}_n) - f(x_0) \geq 0.$$

Da $\tilde{h}_n < 0$, folgt nun

$$\frac{f(x_0 + \tilde{h}_n) - f(x_0)}{\tilde{h}_n} \leq 0.$$

Auch diese Folge von Differenzenquotienten konvergiert wegen der Differenzierbarkeit gegen $f'(x_0)$. Also gilt

$$f'(x_0) \leq 0.$$

Insgesamt folgt

$$f'(x_0) = 0,$$

was zu zeigen war. □

Für hinreichende Bedingungen für Extremstellen verwenden wir den folgenden intuitiv einleuchtenden Zusammenhang. Sein Beweis beruht auf einem weiterführenden Resultat der Analysis, dem sogenannten Mittelwertsatz, den wir hier nicht behandeln.

Satz 11.34 (Monotoniekriterium)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I differenzierbar und $J \subseteq I$ ein beliebiges Intervall. Gilt*

$$f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in J$, so ist f monoton wachsend auf J, das heißt, für alle $x, y \in J$ gilt

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Gilt sogar

$$f'(x) > 0$$

für alle $x \in J$, so ist f streng monoton wachsend auf J, das heißt, für alle $x, y \in J$ gilt

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y).$$

Gilt entsprechend $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in J$, so ist f monoton bzw. streng monoton fallend auf J.

Korollar 11.35 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extremstellen)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I differenzierbar und $x_0 \in I$.*

(a) *Gilt für ein $\delta > 0$*

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0]$$

und

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in [x_0, x_0 + \delta),$$

wobei $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

(b) *Gilt umgekehrt*

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0]$$

und

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in [x_0, x_0 + \delta),$$

so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.

Beweis. Wir beweisen (a). Nach dem Monotoniekriterium ist f auf $(x_0 - \delta, x_0]$ monoton fallend und auf $[x_0, x_0 + \delta)$ monoton wachsend. Daher gilt

$$f(x_0) \leq f(x)$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Somit besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

Der Beweis von (b) erfolgt analog. □

Korollar 11.36 (Hinreichendes Kriterium für lokale Extremstellen über die zweite Ableitung)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$ mit*

$$f'(x_0) = 0.$$

Dann gilt:

(a) *Ist $f''(x_0) > 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.*
(b) *Ist $f''(x_0) < 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.*

Beweis. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis (auch wenn dieser ohne weitere Hilfsmittel möglich ist). □

Beispiel 11.37 (Balken aus einem Baumstamm)**.** *Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt und Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt maximaler Fläche herausgeschnitten werden. Welche Seitenlängen sind optimal?*

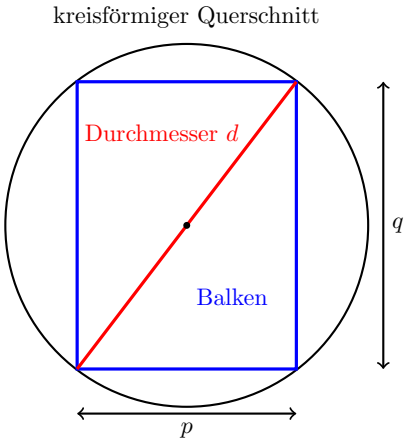


Abbildung 6. Querschnitt des Baumstamms mit einbeschriebenem rechteckigem Balken. Die Seitenlängen des Balkens sind p und q, seine Diagonale ist gleich dem Durchmesser d des Baumstamms.

Lösung: Seien p und q die Seitenlängen des einbeschriebenen Rechtecks. Seine Diagonale hat die Länge d. Nach dem Satz von Pythagoras gilt daher

$$p^2 + q^2 = d^2.$$

Für $q \in [0, d]$ ist somit

$$p = \sqrt{d^2 - q^2}.$$

Die zu maximierende Fläche lässt sich also als Funktion von q schreiben:

$$A(q) = q\sqrt{d^2 - q^2}, \qquad q \in [0, d].$$

Für $q \in (0, d)$ erhalten wir mit Produkt- und Kettenregel

$$A'(q) = \sqrt{d^2 - q^2} - \frac{q^2}{\sqrt{d^2 - q^2}} = \frac{d^2 - 2q^2}{\sqrt{d^2 - q^2}}.$$

Da der Nenner für $q \in (0, d)$ positiv ist, wird das Vorzeichen von $A'(q)$ allein durch $d^2 - 2q^2$ bestimmt. Es gilt

$$A'(q) > 0 \quad \text{für } 0 < q < \frac{d}{\sqrt{2}}, \qquad A'\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

und

$$A'(q) < 0 \quad \text{für } \frac{d}{\sqrt{2}} < q < d.$$

Nach dem Monotoniekriterium ist A somit zunächst streng wachsend und anschließend streng fallend. Da außerdem

$$A(0) = A(d) = 0,$$

nimmt A sein globales Maximum bei

$$q = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

an. Aus $p^2 + q^2 = d^2$ folgt dann

$$p = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Der optimale Querschnitt ist somit ein Quadrat.

Übung 11.38 (Optimaler Eintrittspreis)**.** *Ein Freizeitpark verlangt für eine Sonderveranstaltung einen Eintrittspreis von* 20 *Euro und rechnet bei diesem Preis mit* 1000 *Besuchern. Aus früheren Erfahrungen wird geschätzt, dass eine Erhöhung des Eintrittspreises um einen Euro zu durchschnittlich* 25 *Besuchern weniger führt. Welcher Eintrittspreis maximiert unter diesen Annahmen die Einnahmen?*

12. Trigonometrische Funktionen

Wir beginnen mit der aus der Schulgeometrie bekannten Beschreibung von Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken. Dabei messen wir Winkel zunächst in Grad.

Definition 12.1 (Elementargeometrische Definition von Sinus, Kosinus und Tangens)**.** *Für $\beta \in (0, 90)$ betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck, in dem einer der beiden anderen Winkel $\beta°$ beträgt. Bezüglich dieses Winkels bezeichnen wir die beiden Katheten als* Gegenkathete *und* Ankathete*. Dann definieren wir*

$$\sin(\beta°) = \frac{\textit{Länge der Gegenkathete}}{\textit{Länge der Hypotenuse}},$$
$$\cos(\beta°) = \frac{\textit{Länge der Ankathete}}{\textit{Länge der Hypotenuse}},$$
$$\tan(\beta°) = \frac{\textit{Länge der Gegenkathete}}{\textit{Länge der Ankathete}}.$$

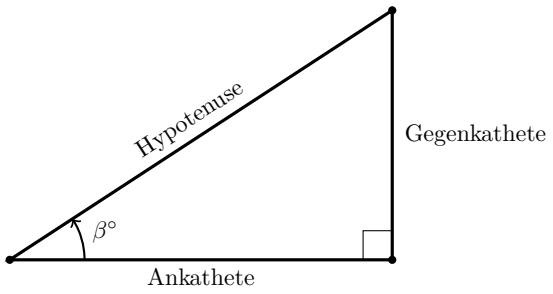


Abbildung 7. Bezeichnungen in einem rechtwinkligen Dreieck bezüglich des Winkels $\beta°$.

Diese Definitionen sind unabhängig von der Größe des gewählten rechtwinkligen Dreiecks, da nach dem ersten Strahlensatz die entsprechenden Seitenverhältnisse gleich sind. Den ersten Strahlensatz beweisen wir hier nicht. Aus dem Satz von Pythagoras folgt unmittelbar

$$\sin^2(\beta°) + \cos^2(\beta°) = 1.$$

Außerdem gilt

$$\tan(\beta°) = \frac{\sin(\beta°)}{\cos(\beta°)}.$$

Die obige elementargeometrische Definition von Sinus, Kosinus und Tangens über rechtwinklige Dreiecke ist auf Winkel zwischen 0° und 90° beschränkt. Um die Definition auf beliebige Winkel zu erweitern, betrachten wir den Einheitskreis mit Radius 1, also die Menge alle Punkte $(x, y)^2 \in \mathbb{R}^2$, deren Abstand zum Ursprung 1 ist. Da nach dem Satz des Pythagoras ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vom Ursprung den Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ hat, lässt sich der Einheitskreis schreiben als

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ein Winkel mit Scheitelpunkt im Ursprung, gemessen von der positiven x-Achse aus, beschreibt einen Kreisbogen auf dem Einheitskreis.

Definition 12.2 (Bogenmaß)**.** *Das* Bogenmaß *α eines Winkels ist die mit einem Vorzeichen versehene, gegebenenfalls mehrfach gezählte Länge des zugehörigen Kreisbogens auf dem Einheitskreis. Dabei werden Drehungen gegen den Uhrzeigersinn positiv und Drehungen im Uhrzeigersinn negativ gezählt.*

Da der Einheitskreis als Kreis mit Radius 1 den Umfang 2π besitzt, entsprechen einer vollen Umdrehung das Bogenmaß 2π und einer halben Umdrehung das Bogenmaß π. Insbesondere gilt

$$360° = 2\pi, \qquad 180° = \pi, \qquad 90° = \frac{\pi}{2}.$$

Allgemein entspricht einem Winkel mit Gradmaß $\beta°$ das Bogenmaß

$$\alpha = \frac{\pi}{180}\,\beta.$$

Definition 12.3 (Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis)**.** *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir tragen auf dem Einheitskreis vom Punkt $(1,0)$ aus einen Winkel mit Bogenmaß α ab; siehe Abbildung 8. Dabei bedeutet $\alpha > 0$ eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn und $\alpha < 0$ eine Drehung im Uhrzeigersinn. Werte, die betragsmäßig größer als 2π sind, bedeuten, dass der Kreis mehrmals durchlaufen wird. Bezeichnet*

$$P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$$

den dadurch bestimmten Punkt auf dem Einheitskreis, so definieren wir

$$\cos(\alpha) := x_\alpha, \qquad \sin(\alpha) := y_\alpha.$$

Falls $\cos(\alpha) \neq 0$, definieren wir außerdem

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Dies ist zugleich die Steigung der Geraden durch den Ursprung und P_α.

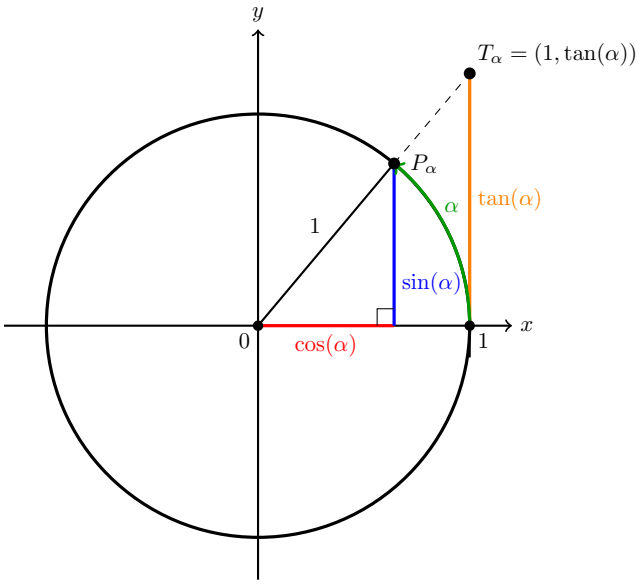


Abbildung 8. Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis. Die Strecken der Länge $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ sind rot bzw. blau dargestellt. Die orange Strecke auf der Tangente im Punkt $(1,0)$ hat die Länge $\tan(\alpha)$. Der grüne Kreisbogen hat auf dem Einheitskreis die Länge α.

Formal haben wir damit die vorherige Definition von Sinus, Kosinus und Tangens aus Definition 12.1 überschrieben. Im Folgenden beziehen sich sin, cos und tan stets auf Winkel im Bogenmaß gemäß Definition 12.3. Für Winkel mit Gradmaß zwischen $0°$ und $90°$ stimmen die Werte beider Definitionen nach Umrechnung vom Grad- ins Bogenmaß überein.

Aus der Definition am Einheitskreis folgen unmittelbar die folgenden Eigenschaften.

Lemma 12.4. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gilt* $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi) = 0$ *und* $\sin(3\pi/2) = -1$.
(b) *Es gilt* $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ *und* $\cos(3\pi/2) = 0$.
(c) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ *und* $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
(d) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
(e) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$.
(f) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$.
(g) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(-x) = -\sin(x)$.
(h) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\cos(-x) = \cos(x)$.
(i) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.
(j) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Beweis. Alle Aussagen folgen unmittelbar aus der geometrischen Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis. Für (a) und (b) betrachtet man insbesondere die vier Punkte $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$ auf dem Einheitskreis. Die Aussagen (c) und (d) folgen daraus, dass $(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis liegt. □

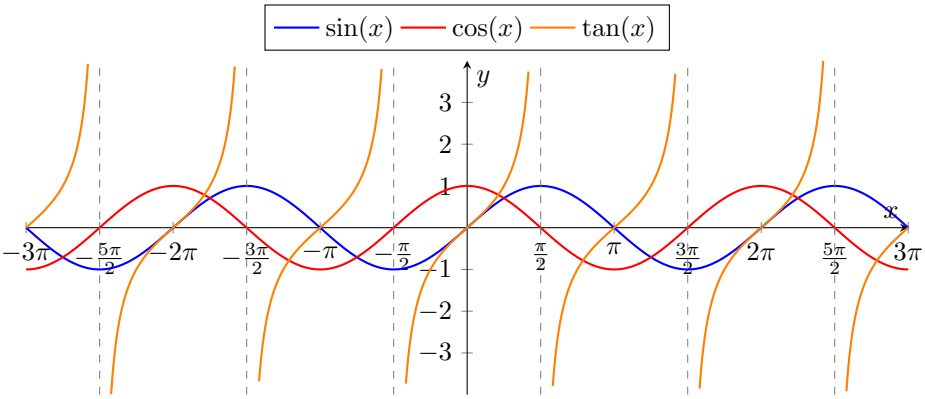


ABBILDUNG 9. Funktionsgraphen von Sinus, Kosinus und Tangens.

Bemerkung 12.5. *Sinus und Kosinus können auch auf rein analytischem Wege definiert werden. Der übliche analytische Zugang besteht darin, die Folgen*

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad c_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

zu betrachten. Man kann zeigen, dass diese Folgen für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergieren, und Sinus und Kosinus durch

$$\sin(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x), \qquad \cos(x) := \lim_{n\to\infty} c_n(x)$$

definieren.

Die trigonometrischen Funktionen werden dabei zunächst unabhängig von geometrischen Begriffen konstruiert. Anschließend kann $\pi/2$ als die kleinste positive Nullstelle des Kosinus und damit π als das Doppelte dieser Zahl definiert werden. Die bekannten geometrischen Eigenschaften von Sinus und Kosinus werden dann aus der analytischen Definition hergeleitet. Wir verzichten hier auf die Einzelheiten dieses Zugangs, da für seine vollständige Durchführung einige vorbereitende Resultate erforderlich wären und er für unsere Zwecke einen vergleichsweise langen Anlauf benötigen würde.

Eine zentrale Eigenschaft von Sinus und Kosinus sind die folgenden Additionstheoreme. Bei einem analytischen Aufbau der trigonometrischen Funktionen lassen sie sich vergleichsweise einfach herleiten; ausgehend von unserer geometrischen Definition ist ihr Beweis etwas aufwendiger.

Satz 12.6 (Additionstheoreme)**.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

und

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf einen Beweis für das erste Additionstheorem im Fall $x, y > 0$ und $x + y < \pi/2$. In diesem Fall stimmt die Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis mit der zuvor eingeführten Definition über Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken überein (bis auf die Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß).

Die für den Beweis relevanten geometrischen Konstruktionen sind in Abbildung 10 illustriert. Im Dreieck OAQ bezeichne r die Länge der Strecke AQ. Da $|OQ| = \cos(y)$ ist, gilt nach der Definition des Sinus

$$\sin(x) = \frac{r}{\cos(y)},$$

also

$$r = \sin(x)\cos(y).$$

Im Dreieck HPQ bezeichne s die Länge der Strecke PH. Man beachte, dass der Winkel bei P gerade x ist (drehe dazu in Gedanken das Dreieck HPQ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt Q). Da $|PQ| = \sin(y)$ ist, gilt nach der Definition des Kosinus

$$\cos(x) = \frac{s}{\sin(y)},$$

also

$$s = \cos(x)\sin(y).$$

Schließlich gilt im Dreieck OSP

$$\sin(x+y) = |SP| = r + s,$$

und damit

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

□

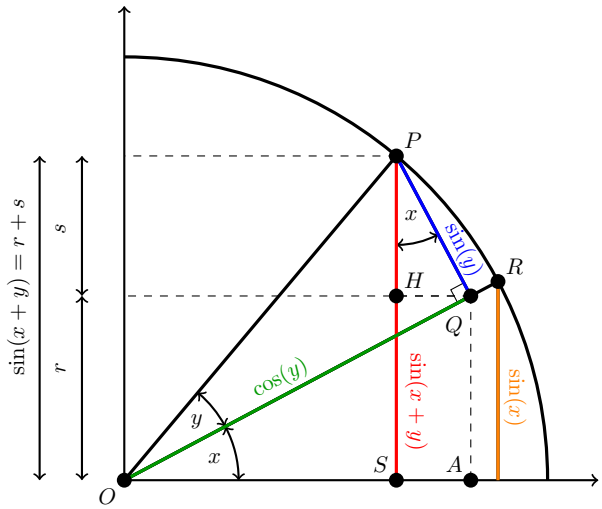


ABBILDUNG 10. Geometrische Herleitung von $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$ für $x, y > 0$ und $x + y < \pi/2$.

Lemma 12.7. *Es gilt*

$$\lim_{h\to 0} \cos h = 1, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Beweis. Für $0 < h < \pi/2$ liefert ein geometrischer Flächenvergleich am Einheitskreis

$$\sin h \le h \le \tan h;$$

man vergleiche dazu die blaue, grüne und orangene Linie in Abbildung 8. Wegen $\sin(-h) = -\sin h$ folgt insbesondere

$$|\sin h| \le |h| \qquad \text{für } 0 < |h| < \frac{\pi}{2}.$$

Zusammen mit $\sin^2 h + \cos^2 h = 1$ erhalten wir daher

$$0 \le 1 - \cos h = \frac{\sin^2 h}{1+\cos h} \le \sin^2 h \le h^2 \qquad \text{für } 0 < |h| < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Mit dem Sandwich-Lemma folgt unmittelbar

$$\lim_{h\to 0} \cos h = 1.$$

Aus $\sin h \le h \le \tan h$ folgt für $0 < h < \pi/2$

$$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1.$$

Wegen der Symmetrie von Sinus und Kosinus gilt diese Abschätzung auch für $-\pi/2 < h < 0$. Da $\cos h \to 1$ für $h \to 0$, liefert das Sandwich-Lemma

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Schließlich folgt aus (3)

$$\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| \leq |h| \qquad \text{für } 0 < |h| < \frac{\pi}{2}.$$

Eine letzte Anwendung des Sandwich-Lemmas ergibt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

□

Lemma 12.8. *Die Funktionen* $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind differenzierbar. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \textit{und} \qquad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Beweis. Wir beweisen nur die Formel für den Sinus, und überlassen die Andere als Übung. Sei $x \in \mathbb{R}$. Mit dem Additionstheorem erhalten wir $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$, so dass für $h \neq 0$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x)\frac{\cos h - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin h}{h}.$$

Nach dem vorherigen Lemma konvergiert für $h \to 0$ der erste Term gegen 0 und der zweite gegen $\cos(x)$. Somit ist sin in x differenzierbar und es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$. □

13. Komplexe Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir möchten daher einen größeren Zahlbereich $\mathbb{C}$ konstruieren, in dem diese Gleichung eine Lösung besitzt.

Dabei soll die Erweiterung mit den reellen Zahlen verträglich sein: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sollen sich als Teil des neuen Zahlbereichs auffassen lassen, und Addition und Multiplikation sollen dort genau dieselben Ergebnisse liefern wie bisher. Darüber hinaus möchten wir die beiden Rechenoperationen so definieren, dass auch der neue Zahlbereich einen Körper bildet.

13.1. **Konstruktion der komplexen Zahlen.** Als Menge definieren wir zunächst

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2.$$

Wir können komplexe Zahlen daher als Punkte in der Ebene auffassen. Diese Ebene heißt auch *komplexe Zahlenebene*; dabei bezeichnet die horizontale Achse die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*. Auf $\mathbb{C}$ definieren wir nun eine Addition und eine Multiplikation.

Definition 13.1. *Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ definieren wir*

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Die Definition der Addition ist naheliegend. Die Definition der Multiplikation mag dagegen zunächst etwas ungewöhnlich erscheinen. Wir werden bald sehen, warum gerade diese Definition sinnvoll ist.

Zunächst betrachten wir die Elemente der Form

$$(a, 0), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

und

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Addition und Multiplikation dieser Elemente liefern also genau dieselben Ergebnisse wie die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen. Wir identifizieren deshalb die reelle Zahl a mit dem Element $(a, 0) \in \mathbb{C}$ und schreiben kurz

$$a = (a, 0).$$

In diesem Sinne können wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen.

Nun betrachten wir das besondere Element

$$i := (0, 1),$$

die sogenannte *imaginäre Einheit*. Nach der Definition der Multiplikation gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Die Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

besitzt in $\mathbb{C}$ also tatsächlich die Lösungen i und $-i$.

Weiterhin lässt sich jedes $(a, b) \in \mathbb{C}$ nun schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib.$$

Es wird sich als zweckmäßig herausstellen, komplexe Zahlen in der Schreibweise $a + ib$ statt (a, b) zu notieren. In dieser Schreibweise lauten die Definitionen von Addition und Multiplikation

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

und

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Diese Formeln entsprechen genau den üblichen, aus $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln, wenn man zusätzlich $i^2 = -1$ verwendet. Insbesondere erhält man für die Multiplikation durch gewöhnliches Ausmultiplizieren

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

So kann man sich die Definition der Multiplikation komplexer Zahlen gut merken.

Definition 13.2. *Sei*

$$z = a + ib \in \mathbb{C}.$$

Dann heißen

$$\mathrm{Re}(z) := a \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Im}(z) := b$$

der Realteil *bzw.* Imaginärteil *von* z.

13.2. **Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.** Wir erinnern daran, dass ein Körper eine Menge ist, auf der Addition und Multiplikation definiert sind und die bekannten grundlegenden Rechengesetze gelten; siehe Definition 3.11.

Satz 13.3. *Die Menge* $\mathbb{C}$ *bildet mit der oben definierten Addition und Multiplikation einen Körper.*

Beweis. Wir überprüfen die wesentlichen Eigenschaften. Für alle $z, w, v \in \mathbb{C}$ gelten

$$z + w = w + z, \qquad (z + w) + v = z + (w + v)$$

sowie

$$zw = wz, \qquad (zw)v = z(wv).$$

Außerdem gilt das Distributivgesetz

$$z(w + v) = zw + zv.$$

Diese Eigenschaften folgen durch direktes Einsetzen aus den entsprechenden Rechengesetzen in $\mathbb{R}$.

Die komplexe Zahl

$$0 = 0 + i0$$

ist das neutrale Element der Addition und

$$1 = 1 + i0$$

das neutrale Element der Multiplikation. Zu

$$z = a + ib$$

ist

$$-z = -a - ib$$

das additive Inverse.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes $z \neq 0$ ein multiplikatives Inverses besitzt. Sei dazu

$$z = a + ib \neq 0.$$

Dann ist $a^2 + b^2 > 0$. Wir setzen

$$w := \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Eine direkte Rechnung ergibt

$$zw = 1.$$

Somit besitzt jedes $z \neq 0$ ein multiplikatives Inverses, nämlich $z^{-1} = w$. □

Wir haben damit tatsächlich den gewünschten größeren Zahlbereich konstruiert: $\mathbb{C}$ ist ein Körper, enthält eine mit $\mathbb{R}$ identifizierbare Teilmenge, auf der die bisherigen Rechenoperationen unverändert bleiben, und enthält darüber hinaus eine Lösung der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.

13.3. **Konjugation und Betrag.** Die Formel für das multiplikative Inverse lässt sich mit einer nützlichen Operation einfacher schreiben.

Definition 13.4. *Für*

$$z = a + ib \in \mathbb{C}$$

heißt

$$\overline{z} := a - ib$$

die komplex konjugierte Zahl *zu* z*. Außerdem heißt*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

der Betrag *von* z*. Nach dem Satz von Pythagoras ist* $|z|$ *gerade der Abstand des zu* z *gehörenden Punktes* (a, b) *in der komplexen Zahlenebene vom Ursprung.*

Unmittelbar aus den Definitionen und der dritten binomischen Formel folgt

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Für $z \neq 0$ können wir das multiplikative Inverse daher schreiben als

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten außerdem

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad |zw| = |z||w|.$$

Für die konkrete Berechnung des Quotienten zweier komplexer Zahlen ist es oft zweckmäßig, Zähler und Nenner mit der konjugierten Zahl des Nenners zu erweitern. Dadurch wird der Nenner reell. Zum Beispiel gilt

$$\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{(2 + i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{5 + 5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

13.4. **Polardarstellung und geometrische Bedeutung der Multiplikation.** Da wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, können wir eine von 0 verschiedene komplexe Zahl durch ihren Abstand vom Ursprung und den Winkel zur positiven reellen Achse beschreiben.

Sei dazu $z = a + ib \neq 0$ und $r := |z|$. Dann liegt

$$\frac{z}{r}$$

auf dem Einheitskreis (warum?). Nach der Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis gibt es daher einen Winkel φ mit

$$\frac{a}{r} = \cos(\varphi), \qquad \frac{b}{r} = \sin(\varphi).$$

Somit gilt

$$a = r\cos(\varphi), \qquad b = r\sin(\varphi),$$

und daher

$$z = r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big).$$

Diese Darstellung heißt *Polardarstellung* von z. Der Winkel φ heißt ein *Argument* von z. Er ist nicht eindeutig, da sich Winkel, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, auf denselben Punkt des Einheitskreises beziehen.

Die Polardarstellung macht die zunächst ungewöhnlich erscheinende Definition der komplexen Multiplikation geometrisch verständlich.

Satz 13.5. *Seien* $r, s > 0$ *und* $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ *sowie*

$$z = r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big), \qquad w = s\big(\cos\psi + i\sin\psi\big).$$

Dann gilt

$$zw = rs\big(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\big).$$

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden also ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert; siehe Abbildung 11.

Beweis. Nach der Definition der Multiplikation gilt

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= rs\big(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \\ &\qquad + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\big). \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgt

$$zw = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big).$$

□

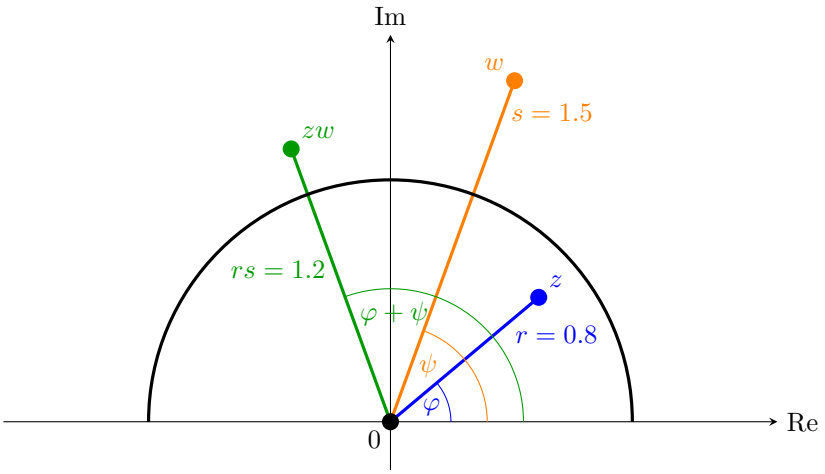


ABBILDUNG 11. Multiplikation komplexer Zahlen: Beträge werden multipliziert, Winkel addiert.

13.5. **Die Euler-Formel.** Die Polarform einer komplexen Zahl legt eine besonders nützliche Schreibweise nahe. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$e^{ix} := \cos(x) + i\sin(x).$$

Die komplexe Zahl e^{ix} liegt also auf dem Einheitskreis und entspricht dort dem Winkel x.

Die Additionstheoreme zeigen, dass diese Schreibweise mit den üblichen Rechenregeln für Potenzen verträglich ist. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\ &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

heißt *Euler-Formel*. In unserem Zugang dient sie zunächst als Definition der Schreibweise e^{ix}. Später werden wir die reelle Exponentialfunktion einführen. In der Analysis lässt sich diese auf komplexe Argumente erweitern; dabei kann man zeigen, dass für rein imaginäre Argumente genau die obige Formel gilt.

Für $x = \pi$ erhalten wir insbesondere

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Diese als *Eulersche Identität* bezeichnete Gleichung verbindet die Zahlen 0, 1, e, i und π in einer einzigen Formel.

13.6. **Der Fundamentalsatz der Algebra.** Ausgangspunkt unserer Konstruktion war die Beobachtung, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzt, in $\mathbb{C}$ dagegen schon. Tatsächlich geht die besondere Bedeutung der komplexen Zahlen weit über dieses Beispiel hinaus.

Ein Polynom mit komplexen Koeffizienten hat die Form

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Dabei heißt n der *Grad* des Polynoms, sofern $a_n \neq 0$.

Satz 13.6 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$*.*

Den Fundamentalsatz der Algebra beweisen wir hier nicht. Trotz seines Namens sind die üblichen Beweise keineswegs elementar und verwenden weiterführende Resultate aus der Analysis oder Funktionentheorie.

Der Satz hat eine bemerkenswerte Konsequenz. Ist z_1 eine Nullstelle eines Polynoms p vom Grad n, so kann man den Linearfaktor $z - z_1$ abspalten:

$$p(z) = (z - z_1) q(z),$$

wobei q ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Ist $n - 1 \geq 1$, so besitzt nach dem Fundamentalsatz auch q eine komplexe Nullstelle. Setzt man dieses Verfahren fort, erhält man:

Korollar 13.7. *Ist p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten, so gibt es $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = a(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Insbesondere besitzt ein komplexes Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen, wenn Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

In diesem Sinne ist die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ besonders erfolgreich: Während selbst einfache Polynomgleichungen in $\mathbb{R}$ ohne Lösung bleiben können, zerfällt über $\mathbb{C}$ jedes nichtkonstante Polynom vollständig in Linearfaktoren. Weitere tiefliegende Eigenschaften komplexer Zahlen und Funktionen werden in der *Funktionentheorie* (komplexen Analysis) untersucht. Dort gelten zahlreiche überraschend starke und oftmals besonders schöne Sätze, für die es in der reellen Analysis keine unmittelbare Entsprechung gibt.

14. Die Exponentialfunktion

Wir haben bereits Grenzwerte von Folgen betrachtet. Eng damit verbunden sind *unendliche Reihen*. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, so betrachten wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Folge (s_n), so schreiben wir für ihren Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Beispiel 14.1 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Für $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls gilt nach der geometrischen Summenformel aus Satz 5.3

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $q^n \to 0$. Beachte dazu die Bernoulli-Ungleichung aus Hausaufgabe 3.1: für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Mit $x = -1 + 1/|q| > 0$ folgt dann

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{|1/q|^n} = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/(x\varepsilon)$. Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$|q^n - 0| \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} < \varepsilon,$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Wir nutzen die geometrische Reihe, um Konvergenz der folgenden Folge zu zeigen.

Lemma 14.2. *Für jedes $x \geq 0$ konvergiert die Folge*

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage unmittelbar klar. Sei also $x > 0$. Da alle Summanden nichtnegativ sind, ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $m + 1 \geq 2x$. Für jedes $k \geq m$ gilt

$$\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!} = \frac{x}{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Jeder Summand ist ab dem Index m also höchstens halb so groß wie der vorherige. Durch wiederholte Anwendung dieser Abschätzung erhalten wir für $j \geq 0$

$$\frac{x^{m+j}}{(m+j)!} \leq \frac{1}{2}\frac{x^{m+j-1}}{(m+j-1)!} \leq \frac{1}{2^2}\frac{x^{m+j-2}}{(m+j-2)!} \leq \cdots \leq \frac{1}{2^j}\frac{x^m}{m!}.$$

Mit der geometrischen Reihe folgt für $n \geq m$

$$s_n(x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + 2\frac{x^m}{m!}.$$

Die Folge $(s_n(x))$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt und damit konvergent. □

Definition 14.3. *Für $x \geq 0$ definieren wir die* Exponentialfunktion *durch*

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Insbesondere definieren wir die Eulersche Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Satz 14.4 (Funktionalgleichung)**.** *Für alle $x, y \geq 0$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Beweis. Wir schreiben

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Nach Definition gilt $s_n(x) \to \exp(x)$ für $n \to \infty$. Für $x, y \geq 0$ erhalten wir

$$s_n(x)s_n(y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{y^\ell}{\ell!}\right).$$

Die beim Ausmultiplizieren entstehenden Summanden lassen sich in folgendem Schema anordnen:

	1	y	$\frac{y^2}{2!}$	$\cdots$	$\frac{y^n}{n!}$
1	1	y	$\frac{y^2}{2!}$	$\cdots$	$\frac{y^n}{n!}$
x	x	xy	$\frac{xy^2}{2!}$	$\cdots$	$\frac{xy^n}{n!}$
$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^2y}{2!}$	$\frac{x^2y^2}{2!2!}$	$\cdots$	$\frac{x^2y^n}{2!n!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{x^ny}{n!}$	$\frac{x^ny^2}{n!2!}$	$\cdots$	$\frac{x^ny^n}{n!n!}$

Die Matrix besitzt insgesamt $2n+1$ Diagonalen von links unten nach rechts oben. Ein Eintrag der Form

$$\frac{x^k y^\ell}{k!\ell!}$$

hat den *Gesamtgrad* $k+\ell$. Auf jeder Diagonalen ist der Gesamtgrad aller Einträge konstant. Für $r \in \{0, \ldots, 2n\}$ bezeichnen wir die Summe der Einträge mit Gesamtgrad r mit D_r. Damit gilt

$$s_n(x)s_n(y) = \sum_{r=0}^{2n} D_r.$$

Für $r \leq n$ enthält die Diagonale zum Gesamtgrad r alle Terme

$$\frac{x^k y^{r-k}}{k!(r-k)!}, \qquad k = 0, \ldots, r.$$

Nach der Binomialformel gilt daher

$$D_r = \sum_{k=0}^{r} \frac{x^k y^{r-k}}{k!(r-k)!} = \frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = \frac{(x+y)^r}{r!}.$$

Da alle Einträge der Tabelle nichtnegativ sind, folgt

$$s_n(x+y) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(x+y)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} D_r \leq \sum_{r=0}^{2n} D_r = s_n(x)s_n(y).$$

Für die umgekehrte Abschätzung betrachten wir eine Diagonale zum Gesamtgrad $r > n$. Sie enthält genau die Terme

$$\frac{x^k y^{r-k}}{k!(r-k)!}, \qquad r-n \leq k \leq n.$$

Da $x, y \geq 0$, folgt

$$D_r = \sum_{k=r-n}^{n} \frac{x^k y^{r-k}}{k!(r-k)!} \leq \sum_{k=0}^{r} \frac{x^k y^{r-k}}{k!(r-k)!} = \frac{(x+y)^r}{r!}.$$

Für $r \leq n$ gilt sogar Gleichheit. Daher folgt insgesamt

$$s_n(x)s_n(y) = \sum_{r=0}^{2n} D_r \leq \sum_{r=0}^{2n} \frac{(x+y)^r}{r!} = s_{2n}(x+y).$$

Wir haben somit

$$s_n(x+y) \leq s_n(x)s_n(y) \leq s_{2n}(x+y).$$

Sowohl $s_n(x+y)$ als auch $s_{2n}(x+y)$ konvergieren gegen $\exp(x+y)$. Nach dem Sandwich-Lemma folgt daher

$$s_n(x)s_n(y) \longrightarrow \exp(x+y).$$

Andererseits liefern die Rechenregeln für konvergente Folgen

$$s_n(x)s_n(y) \longrightarrow \exp(x)\exp(y).$$

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt schließlich

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

□

Für $x > 0$ definieren wir nun

$$\exp(-x) := \frac{1}{\exp(x)}.$$

Damit ist die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

gilt dann auch für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ (Übung; man benötigt einige Fallunterscheidungen). Aus der Funktionalgleichung folgt weiterhin

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e^2$$

oder

$$\exp(-2) = \exp(-1+(-1)) = \exp(-1)\exp(-1) = e^{-2}$$

und allgemeiner

$$\exp(n) = e^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die bereits bekannte Schreibweise e^n für ganzzahlige Potenzen legt es daher nahe, auch für beliebige $x \in \mathbb{R}$

$$e^x := \exp(x)$$

zu schreiben.

Satz 14.5. *Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Beweisidee. Wir skizzieren einen Beweis für den Fall $x > 0$. Für

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = s_{n-1}(x).$$

Für $n \to \infty$ konvergieren somit sowohl $s_n(x)$ als auch $s_n'(x)$ gegen $\exp(x)$.

Um daraus $\exp'(x) = \exp(x)$ zu folgern, müssen wir formal zwei Grenzübergänge miteinander vertauschen: den Grenzwert in der Definition der Ableitung und den Grenzwert $n \to \infty$ in der Definition der Exponentialfunktion. Für den technischen Nachweis, dass dies an dieser Stelle zulässig ist, verweisen wir auf die Analysis. □

Lemma 14.6. *Die Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann ist $y - x > 0$, und aus der Definition der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(y - x) > 1.$$

Mit der Funktionalgleichung erhalten wir daher

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y - x) > \exp(x),$$

da $\exp(x) > 0$. Somit ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und insbesondere injektiv.

Für $x \geq 0$ folgt unmittelbar aus der Definition

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + x.$$

Daher gilt

$$\exp(x) \longrightarrow \infty \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Wegen

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

folgt außerdem

$$\exp(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{für } x \to -\infty.$$

Ein grundlegendes Resultat der Analysis besagt, dass eine differenzierbare (es genügt sogar stetige) Funktion keine Werte zwischen zwei angenommenen Funktionswerten "überspringen" kann. Daraus folgt schließlich die Surjektivität. □

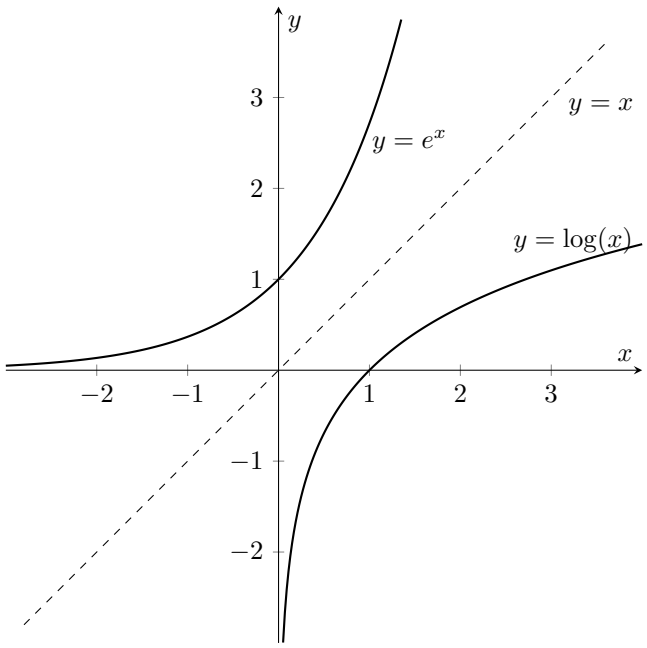


Abbildung 12. Graphen von Exponentialfunktion und natürlichem Logarithmus.

Beispiel 14.7 (Kontinuierliches Wachstum)**.** *Eine Population bestehe zum Zeitpunkt $t = 0$ aus N_0 Individuen. Wir nehmen an, dass ihre momentane Wachstumsrate proportional zur aktuellen Größe der Population ist. Bezeichnet $N(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt t, so bedeutet dies*

$$N'(t) = rN(t)$$

mit einer Konstanten $r > 0$. Da $\exp'(x) = \exp(x)$ gilt, erfüllt die Funktion

$$N(t) := N_0 \exp(rt)$$

diese Gleichung. Tatsächlich liefert die Kettenregel

$$N'(t) = rN_0 \exp(rt) = rN(t).$$

Außerdem gilt $N(0) = N_0$.

Die Exponentialfunktion beschreibt somit Prozesse, bei denen die momentane Änderung proportional zur aktuell vorhandenen Menge ist. Für $r > 0$ erhalten wir exponentielles Wachstum. Ist dagegen $r < 0$, so beschreibt dieselbe Formel exponentiellen Zerfall.

14.1. **Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen.**

Definition 14.8. *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

heißt (natürlicher) Logarithmus. *Wir bezeichnen sie mit*

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Per Definition gelten

$$\log(1) = 0, \qquad \log(e) = 1.$$

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir die wichtigste Rechenregel für den Logarithmus.

Lemma 14.9. *Für alle $a, b > 0$ gilt*

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

Beweis. Setze $x = \log(a)$ und $y = \log(b)$, so dass $a = \exp(x)$ und $b = \exp(y)$. Mit der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion folgt

$$ab = \exp(x)\exp(y) = \exp(x + y).$$

Daher ist

$$\log(ab) = x + y = \log(a) + \log(b).$$

□

Lemma 14.10. *Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt*

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Beweisidee. Da log die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt für $x > 0$

$$\exp(\log(x)) = x.$$

Differenzieren wir diese Gleichung und verwenden die Kettenregel, so erhalten wir

$$\exp(\log(x))\log'(x) = 1.$$

Wegen $\exp(\log(x)) = x$ folgt

$$x \log'(x) = 1$$

und damit

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Formal ist dabei noch zu begründen, dass die Umkehrfunktion log der differenzierbaren Funktion exp selbst differenzierbar ist. Den entsprechenden allgemeinen Satz werden wir in der Analysis kennenlernen. □

Mit Hilfe des Logarithmus können wir nun Potenzen mit beliebiger positiver Basis und beliebigem reellen Exponenten definieren.

Definition 14.11. *Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$a^x := \exp\big(x \log(a)\big).$$

Für festes $a > 0$ heißt die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad f_a(x) := a^x,$$

Exponentialfunktion zur Basis a. *Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt dagegen die Funktion*

$$g_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty), \qquad g_\alpha(x) := x^\alpha,$$

Potenzfunktion mit Exponent α.

Diese Definition stimmt mit den uns bereits bekannten Potenzen überein. Ist beispielsweise $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Funktionalgleichung

$$a^n = \exp\big(n \log(a)\big) = \exp\big(\log(a)\big)^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}.$$

Die neue Definition von a^n stimmt also mit der bekannten ganzzahligen Potenz überein. Dieses Argument lässt sich auch auf rationale Exponenten erweitern. Ganz allgemein gelten die folgenden bekannten Rechenregeln.

Lemma 14.12 (Potenzgesetze)**.** *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

sowie

$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x.$$

Beweis. Die Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition und den Rechenregeln für Exponentialfunktion und Logarithmus. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp\big((x+y)\log(a)\big) \\ &= \exp\big(x \log(a)\big) \exp\big(y \log(a)\big) \\ &= a^x a^y. \end{aligned}$$

Die übrigen Aussagen zeigt man analog. □

Lemma 14.13. *Für jedes $a > 0$ ist die Exponentialfunktion*

$$f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty), \qquad f_a(x) = a^x,$$

differenzierbar, und es gilt

$$f_a'(x) = \log(a) a^x.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$f_a(x) = \exp\big(x \log(a)\big).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$f_a'(x) = \log(a) \exp\big(x \log(a)\big) = \log(a) a^x.$$

□

Lemma 14.14. *Für jedes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Potenzfunktion*

$$g_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty), \qquad g_\alpha(x) = x^\alpha,$$

differenzierbar, und es gilt

$$g_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$g_\alpha(x) = \exp\big(\alpha \log(x)\big).$$

Mit der Kettenregel und $\log'(x) = 1/x$ folgt

$$g_\alpha'(x) = \exp\big(\alpha \log(x)\big) \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

□

Lemma 14.15 (Exponentielles Wachstum dominiert jedes polynomiale Wachstum)**.** *Für jedes $a > 1$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{a^x} = 0.$$

Beweis. Da $a > 1$ gilt $\log(a) > 0$. Setze

$$c := \log(a) > 0.$$

Nach Definition gilt

$$a^x = \exp(cx).$$

Aus der Definition der Exponentialfunktion folgt für $x > 0$

$$\exp(cx) \geq \frac{(cx)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Daher gilt

$$0 \leq \frac{x^m}{a^x} \leq \frac{(m+1)!}{c^{m+1}x}.$$

Da die rechte Seite für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Sandwich-Lemma. □