

Das Random-Cluster-Modell

Positive Assoziiertheit, Ableitung und Monotonie der RC-Maße

Sanjay Pillai

Juni 2026

Positive Assoziiertheit des RC-Maßes (Theorem 3.8)

Theorem (Theorem 3.8)

Sei $p \in (0, 1)$ und $q \in [1, \infty)$. Dann gilt:

1. Das Random-Cluster-Maß $\phi_{p,q}$ ist strikt positiv und erfüllt die FKG-Gitter-Bedingung

$$\phi_{p,q}(\omega_1 \vee \omega_2) \phi_{p,q}(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \phi_{p,q}(\omega_1) \phi_{p,q}(\omega_2), \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

2. Das Random-Cluster-Maß $\phi_{p,q}$ ist stark positiv assoziiert, und

$$\begin{aligned} \phi_{p,q}(XY) &\geq \phi_{p,q}(X)\phi_{p,q}(Y) && \text{für wachsende } X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ \phi_{p,q}(A \cap B) &\geq \phi_{p,q}(A)\phi_{p,q}(B) && \text{für wachsende } A, B \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Gegenbeispiel für $q \in (0, 1)$

Sei $q \leq 1$

Wir betrachten die wachsenden Ereignisse $J_e = \{\omega : \omega(e) = 1\}$ und $J_f = \{\omega : \omega(f) = 1\}$ und zeigen, dass

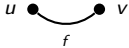
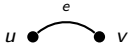
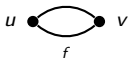
$$\phi_{p,q}(J_e \cap J_f) < \phi_{p,q}(J_e)\phi_{p,q}(J_f)$$

für $q < 1$ gelten kann.

Der Graph und seine Konfigurationen

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{u, v\}$ und $E = \{e, f\}$, beide Kanten verbinden u und v . Jede Konfiguration $\omega = (\omega(e), \omega(f)) \in \{0, 1\}^2$ erhält das unnormierte Gewicht

$$\nu(\omega) := p^{|\eta(\omega)|} (1-p)^{|E|-|\eta(\omega)|} q^{k(\omega)}.$$

ω	Graph	$ \eta(\omega) $	$k(\omega)$	$\nu(\omega)$
$(0, 0)$		0	2	$(1-p)^2 q^2$
$(0, 1)$		1	1	$p(1-p)q$
$(1, 0)$		1	1	$p(1-p)q$
$(1, 1)$		2	1	$p^2 q$

Partitionsfunktion

ω	$ \eta(\omega) $	$k(\omega)$	$\nu(\omega)$
(0, 0)	0	2	$(1-p)^2 q^2$
(0, 1)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 0)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 1)	2	1	$p^2 q$

$$Z(p, q) = \sum_{\omega \in \Omega} \nu(\omega)$$
$$= (1-p)^2 q^2 + 2p(1-p)q + p^2 q$$

Wahrscheinlichkeit von $J_e \cap J_f$

ω	$ \eta(\omega) $	$k(\omega)$	$\nu(\omega)$
(0, 0)	0	2	$(1-p)^2 q^2$
(0, 1)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 0)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 1)	2	1	$p^2 q$

$$\phi_{p,q}(J_e \cap J_f) = \phi_{p,q}(1, 1) = \frac{p^2 q}{Z}$$

Wahrscheinlichkeit von J_e und J_f

ω	$ \eta(\omega) $	$k(\omega)$	$\nu(\omega)$
(0, 0)	0	2	$(1-p)^2 q^2$
(0, 1)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 0)	1	1	$p(1-p)q$
(1, 1)	2	1	$p^2 q$

$$\phi_{p,q}(J_e) = \phi_{p,q}(J_f) = \frac{w(1,1) + w(1,0)}{Z}$$

$$= \frac{p^2 q + p(1-p)q}{Z}$$

$$= \frac{pq(p+1-p)}{Z} = \frac{pq}{Z}$$

Berechnung der Kovarianz

$$\begin{aligned}\phi_{p,q}(J_e \cap J_f) - \phi_{p,q}(J_e)\phi_{p,q}(J_f) &= \frac{p^2q}{Z} - \frac{(pq)^2}{Z^2} \\ &= \frac{Zp^2q - (pq)^2}{Z^2} \\ &= \frac{p^2q(Z - q)}{Z^2}\end{aligned}$$

Das Gegenbeispiel schlägt für $q < 1$ fehl

Es folgt

$$\phi_{p,q}(J_e \cap J_f) - \phi_{p,q}(J_e)\phi_{p,q}(J_f) = \frac{p^2 q^2 (q - 1)(1 - p)^2}{Z(p, q)^2}.$$

Für $q < 1$ und $0 < p < 1$ ist dieser Ausdruck **negativ**, d.h. J_e und J_f sind *negativ* korreliert.

Beweisstrategie

1. Zeige, dass $\phi_{p,q}$ strikt positiv ist.
2. Zeige die FKG-Gitter-Bedingung für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit Hamming-Abstand $H(\omega_1, \omega_2) = 2$
3. Folgere mit Theorem 2.22, dass die FKG-Gitter-Bedingung auf ganz Ω gilt.
4. Folgere mit Theorem 2.27, dass strikte Positivität *und* die FKG-Gitter-Bedingung starke positive Assoziiiertheit implizieren.

Beweis: Schritt 1 strikte Positivität

Schritt 1.

Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt

$$\phi_{p,q}(\omega) = \frac{1}{Z_{RC}} \prod_{e \in E} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} q^{k(\omega)},$$
$$Z_{RC} = \sum_{\omega' \in \Omega} \prod_{e \in E} p^{\omega'(e)} (1-p)^{1-\omega'(e)} q^{k(\omega')}.$$

Da $p \in (0, 1)$, $q > 0$ und E endlich ist, ist jeder Summand strikt positiv, also auch $Z_{RC} > 0$ und damit $\phi_{p,q}(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. □

Beweis: Schritt 2

Nach **Theorem 2.22** genügt es dafür, die FKG-Gitter-Bedingung für *unvergleichbare* Paare $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ (d.h. $\omega_1 \not\leq \omega_2$ und $\omega_2 \not\leq \omega_1$) mit Hamming-Abstand

$$H(\omega_1, \omega_2) := \#\{e \in E : \omega_1(e) \neq \omega_2(e)\} = 2$$

zu zeigen.

Reduktion auf zwei Kanten

Da $H(\omega_1, \omega_2) = 2$, existieren Kanten $e, f \in E$ und ein $\omega \in \Omega$, sodass sich ω_1, ω_2 nur in e, f von ω unterscheiden und genau eine der beiden Kanten jeweils öffnen. Wir schreiben kurz

$$\omega_1 = 10, \quad \omega_2 = 01$$

Es gilt:

$$\omega_1 \vee \omega_2 = 11, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = 00.$$

Definition: der Indikator D_f

Definition

Für eine Kante $f \in E$ mit Endpunkten u, v sei $D_f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ der Indikator dafür, dass u, v in $E \setminus \{f\}$ *nicht* durch einen offenen Pfad verbunden sind.

D_f ist fallend

Sei $f \in E$ mit $f = \langle u, v \rangle$. Dann ist D_f eine *fallende* Zufallsvariable:
Werden mehr Kanten in G geöffnet, so steigt nur die Möglichkeit,
 u, v über Kanten in $E \setminus \{f\}$ zu verbinden, D_f kann also nur fallen.

$$\omega \leq \omega' \implies D_f(\omega) \geq D_f(\omega').$$

Clusteranzahl und D_f

Lemma

Für die Kanten e, f aus der Reduktion (mit $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 01$) gilt

1. $k(10) - k(11) = D_f(10)$
2. $k(00) - k(01) = D_f(00)$

Proof.

Nach Definition ist $D_f(\omega) \in \{0, 1\}$:

- ▶ $D_f(10) = 0 \Rightarrow k(10) = k(11)$
- ▶ $D_f(10) = 1 \Rightarrow k(10) = k(11) - 1$, da die Endpunkte von f durch Hinzufügen verbunden werden.
- ▶ Für $D_f(00)$ gilt dasselbe Argument analog. □

Clusterungleichung

Da $00 \leq 10$ und D_f fallend ist, folgt $D_f(10) \leq D_f(00)$. Mit dem Lemma erhalten wir

$$\begin{aligned} k(10) - k(11) &= D_f(10) \leq D_f(00) = k(00) - k(01) \\ \implies k(10) + k(01) &\leq k(11) + k(00) \end{aligned}$$

Es folgt also

$$k(\omega_1) + k(\omega_2) \leq k(\omega_1 \vee \omega_2) + k(\omega_1 \wedge \omega_2) \quad (1)$$

Additivität von $|\eta|$

Für jede einzelne Kante $g \in E$ gilt

$$\begin{aligned}(\omega_1 \vee \omega_2)(g) + (\omega_1 \wedge \omega_2)(g) &= \max\{\omega_1(g), \omega_2(g)\} + \min\{\omega_1(g), \omega_2(g)\} \\ &= \omega_1(g) + \omega_2(g).\end{aligned}$$

$$|\eta(\omega_1 \vee \omega_2)| + |\eta(\omega_1 \wedge \omega_2)| = |\eta(\omega_1)| + |\eta(\omega_2)|, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega. \quad (**)$$

Zusammensetzen

$$\begin{aligned} & \phi_{p,q}(\omega_1 \vee \omega_2) \phi_{p,q}(\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &= \frac{1}{Z^2} p^{|\eta(\omega_1 \vee \omega_2)| + |\eta(\omega_1 \wedge \omega_2)|} (1-p)^{2|E| - |\eta(\omega_1 \vee \omega_2)| - |\eta(\omega_1 \wedge \omega_2)|} q^{k(\omega_1 \vee \omega_2) + k(\omega_1 \wedge \omega_2)} \\ &= \frac{1}{Z^2} p^{|\eta(\omega_1)| + |\eta(\omega_2)|} (1-p)^{2|E| - |\eta(\omega_1)| - |\eta(\omega_2)|} q^{k(\omega_1 \vee \omega_2) + k(\omega_1 \wedge \omega_2)} \\ &\geq \frac{1}{Z^2} p^{|\eta(\omega_1)| + |\eta(\omega_2)|} (1-p)^{2|E| - |\eta(\omega_1)| - |\eta(\omega_2)|} q^{k(\omega_1) + k(\omega_2)} \\ &= \phi_{p,q}(\omega_1) \phi_{p,q}(\omega_2) \end{aligned}$$

Damit gilt die FKG-Gitter-Bedingung für $H(\omega_1, \omega_2) = 2$.

Beweis: Schritt 3 Abschluss

Mit Theorem 2.22 gilt die FKG-Gitter-Bedingung damit für *alle* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ (Schritt 2).

Nach **Theorem 2.27** (für strikt positive Maße ist starke positive Assoziiertheit äquivalent zur FKG-Gitter-Bedingung) folgt insgesamt 1. $\implies$ 2. ■

Theorem 2.27

Theorem

Sei μ strikt positives W -Maß dann sind folgende aussagen äquivalent

- 1. μ ist stark positiv assoziiert*
- 2. μ erfüllt die FKG Gittereigenschaft*
- 3. μ ist monoton*
- 4. μ ist 1-monoton*

Ableitung des Random-Cluster-Maßes (Theorem 3.12)

Theorem (Theorem 3.12)

Sei $p \in (0, 1)$, $q \in (0, \infty)$, und $\phi_{p,q}$ das Random-Cluster-Maß auf einem endlichen Graphen $G = (V, E)$. Für jede Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

1. $\frac{d}{dp} \phi_{p,q}(X) = \frac{1}{p(1-p)} \text{Cov}_{p,q}(|\eta|, X),$
2. $\frac{d}{dq} \phi_{p,q}(X) = \frac{1}{q} \text{Cov}_{p,q}(k, X).$

Beweis Ableitung des Random Cluster Maßes

Definition

Sei $\nu_{p,q}(\omega) = p^{|\eta(\omega)|} (1-p)^{E-|\eta(\omega)|} q^{k(\omega)}$

Dann $\phi_{p,q}(X) = \frac{1}{Z(p,q)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \nu_{p,q}$

Ableiten von $\nu_{p,q}$

1. $\nu_{p,q}(\omega) = p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{E-|\eta(\omega)|}q^{k(\omega)}$

2. Logarithmisches ableiten

$$\begin{aligned}\ln(\nu_{p,q}(\omega)) &= \ln(p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{E-|\eta(\omega)|}q^{k(\omega)}) \\ &= |\eta(\omega)|\ln(p) + (E - |\eta(\omega)|)\ln(1-p) + k(\omega)\ln(q)\end{aligned}$$

3. Ableiten

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{\nu'_{p,q}(\omega)}{\nu_{p,q}(\omega)} &= \frac{|\eta(\omega)|}{p} - \frac{E - |\eta(\omega)|}{1-p} \\ \Leftrightarrow \nu'_{p,q}(\omega) &= \nu_{p,q}(\omega) \frac{|\eta(\omega)| - pE}{p(1-p)}\end{aligned}$$

Beweis Ableitung

1. Quotienten Regel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\phi_{p,q}(X) &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\nu'_{p,q}(\omega)Z - \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\nu_{p,q}(\omega)Z'}{Z^2} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\nu'_{p,q}(\omega) - \frac{Z'}{Z}\phi_{p,q}(X)\end{aligned}$$

2. Sei $X = 1$

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{Z} \sum_{\omega \in \Omega} \nu'_{p,q}(\omega) - \frac{Z'}{Z} \\ \frac{Z'}{Z} &= \frac{1}{Z} \sum_{\omega \in \Omega} \nu'_{p,q} = \frac{1}{Z} \sum_{\omega \in \Omega} \nu_{p,q}(\omega) \frac{|\eta(\omega)| - pE}{p(1-p)} = \frac{\phi_{p,q}(|\eta| - pE)}{p(1-p)}\end{aligned}$$

Zusammenfassen

Einsetzen von

1. $\frac{Z'}{Z} = \frac{\phi_{p,q}(|\eta| - pE)}{p(1-p)}$
2. $\nu'_{p,q}(\omega) = \nu_{p,q}(\omega) \frac{|\eta(\omega)| - pE}{p(1-p)}$

in

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q}(X) = \frac{1}{Z} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \nu'_{p,q}(\omega) - \frac{Z'}{Z} \phi_{p,q}(X)$$

liefert die Behauptung

Beispiel: Monotonie von $|\eta|$ und k

1. $|\eta(\omega)|$ ist eine wachsende Zufallsvariable.
2. $k(\omega)$ ist eine fallend Zufallsvariable.

Anwendung: Monotonie in p und q

Sei X eine wachsende Zufallsvariable. Für $q \geq 1$ ist $\phi_{p,q}$ positiv assoziiert (Theorem 3.8), also

$$\frac{d}{dp} \phi_{p,q}(X) = \frac{1}{p(1-p)} \text{Cov}_{p,q}(|\eta|, X) \geq 0,$$

da $|\eta|$ und X beide wachsend sind. Da k fallend ist, liefert die positive Assoziiiertheit hier eine *Negativkorrelation*, also

$$\frac{d}{dq} \phi_{p,q}(X) = \frac{1}{q} \text{Cov}_{p,q}(k, X) \leq 0.$$

Monotonie der RC-Maße (Theorem 3.21)

Theorem (Theorem 3.21)

Seien $p_1, p_2 \in (0, 1)$, $q_1, q_2 \in (0, \infty)$. Dann gilt:

1. $\phi_{p_1, q_1} \leq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2}$, wenn $q_1 \geq q_2$, $q_1 \geq 1$ und $p_1 \leq p_2$.
2. $\phi_{p_1, q_1} \geq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2}$, wenn $q_1 \geq q_2$, $q_1 \geq 1$, und

$$\frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \geq \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}.$$

Dabei bedeutet $\phi \leq_{\text{st}} \psi$, dass $\phi(X) \leq \psi(X)$ für jede wachsende $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Beweisstrategie

1. Definiere zu X eine geeignete Hilfsfunktion $Y(\omega)$ und zeige die *allgemeine Identität*

$$\phi_{p_2, q_2}(X) = \frac{\phi_{p_1, q_1}(XY)}{\phi_{p_1, q_1}(Y)}$$

für *jede* wachsende X .

2. Für Teil 1: Zeige, dass Y unter den Bedingungen von 1. *wachsend* ist, und wende Theorem 3.8 an.
3. Für Teil 2: Zeige, dass dieselbe Funktion Y unter den Bedingungen von 2. *fallend* ist, und wende erneut Theorem 3.8 an

Die Hilfsfunktion Y

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend.

Wir definieren Y als

$$Y(\omega) = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k(\omega)} \left(\frac{\frac{p_2}{1-p_2}}{\frac{p_1}{1-p_1}} \right)^{|\eta(\omega)|}. \quad (2)$$

Allgemeine Identität: Behauptung

Wir zeigen zunächst, dass

$$\phi_{p_2, q_2}(X) = \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{|E|} \frac{Z(p_1, q_1)}{Z(p_2, q_2)} \phi_{p_1, q_1}(XY). \quad (*)$$

Beweis von (*): Schritt 1

Anwenden der Definition von $\phi_{p_1, q_1}(XY)$ und kürzen von $Z(p_1, q_1)$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{|E|} \frac{Z(p_1, q_1)}{Z(p_2, q_2)} \phi_{p_1, q_1}(XY) \\ &= \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{|E|} \frac{1}{Z(p_2, q_2)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) p_1^{|\eta(\omega)|} (1 - p_1)^{|E| - |\eta(\omega)|} q_1^{k(\omega)} \end{aligned}$$

Beweis von (*): Schritt 2 Definition von Y einsetzen

Anwenden der Definition von Y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{|E|} \frac{1}{Z(p_2, q_2)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) p_1^{|\eta(\omega)|} (1-p_1)^{|E|-|\eta(\omega)|} q_1^{k(\omega)} \\ &= \frac{1}{Z(p_2, q_2)} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k(\omega)} \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} \right)^{|\eta(\omega)|} \\ & \quad \cdot p_1^{|\eta(\omega)|} (1-p_1)^{|E|-|\eta(\omega)|} q_1^{k(\omega)} \end{aligned}$$

Beweis von (*): Schritt 3, Exponenten zusammenfassen

Kürzen der Terme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Z(p_2, q_2)} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^{k(\omega)} \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} \right)^{|\eta(\omega)|} \\ & \quad \cdot p_1^{|\eta(\omega)|} (1-p_1)^{|E|-|\eta(\omega)|} q_1^{k(\omega)} \\ &= \frac{1}{Z(p_2, q_2)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) q_2^{k(\omega)} p_2^{|\eta(\omega)|} (1-p_2)^{|E|-|\eta(\omega)|} \end{aligned}$$

Beweis von (*): Abschluss

$$\frac{1}{Z(p_2, q_2)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) q_2^{k(\omega)} p_2^{|\eta(\omega)|} (1 - p_2)^{|E| - |\eta(\omega)|} = \phi_{p_2, q_2}(X)$$

Damit ist (*) gezeigt:

$$\phi_{p_2, q_2}(X) = \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{|E|} \frac{Z(p_1, q_1)}{Z(p_2, q_2)} \phi_{p_1, q_1}(XY).$$

Den Vorfaktor bestimmen

Setzen wir $X = 1$ in $(*)$ ein, so erhalten wir

$$1 = \phi_{p_2, q_2}(1) = \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{|E|} \frac{Z(p_1, q_1)}{Z(p_2, q_2)} \phi_{p_1, q_1}(Y).$$

Die allgemeine Identität

Einsetzen in (*) liefert für *jede* wachsende X :

$$\phi_{p_2, q_2}(X) = \frac{\phi_{p_1, q_1}(XY)}{\phi_{p_1, q_1}(Y)}.$$

Y ist wachsend

Y ist wachsend, da

1. da $q_1 \geq q_2$ folgt $\frac{q_2}{q_1} \leq 1$, da $k(\omega)$ fallend ist $\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k(\omega)}$ wachsend
2. da $p_1 \leq p_2$ folgt $\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \geq 1$, da $|\eta(\omega)|$ wachsend ist $\left(\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)}\right)^{|\eta(\omega)|}$ wachsend

$$Y(\omega) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k(\omega)} \left(\frac{\frac{p_2}{1-p_2}}{\frac{p_1}{1-p_1}}\right)^{|\eta(\omega)|}. \quad (3)$$

Beweis von Teil 1

Da X und Y wachsend sind und ϕ_{p_1, q_1} für $q_1 \geq 1$ positiv assoziiert ist (Theorem 3.8), gilt

$$\phi_{p_1, q_1}(XY) \geq \phi_{p_1, q_1}(X) \phi_{p_1, q_1}(Y).$$

Folgt:

$$\begin{aligned}\phi_{p_2, q_2}(X) &= \frac{\phi_{p_1, q_1}(XY)}{\phi_{p_1, q_1}(Y)} \geq \frac{\phi_{p_1, q_1}(X) \phi_{p_1, q_1}(Y)}{\phi_{p_1, q_1}(Y)} \\ &\implies \phi_{p_2, q_2}(X) \geq \phi_{p_1, q_1}(X)\end{aligned}$$

für jede wachsende X also $\phi_{p_1, q_1} \leq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2}$.

Beweis von Teil 2: Y anders gruppiert

Für Teil 2 schreiben wir dieselbe Funktion Y äquivalent um

$$Y(\omega) = \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{k(\omega)+|\eta(\omega)|} \left(\frac{p_2/(q_2(1-p_2))}{p_1/(q_1(1-p_1))}\right)^{|\eta(\omega)|}.$$

1. $k(\omega) + |\eta(\omega)|$ ist wachsend denn $k(\omega)$ fällt maximal um 1 wenn $|\eta(\omega)|$ um 1 ansteigt
2. $|\eta(\omega)|$ ist wachsend

Y ist fallend

1. Da $q_1 \geq q_2$ folgt $\frac{q_2}{q_1} \leq 1$

2. Da $\frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \geq \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}$ folgt $\frac{p_2/(q_2(1-p_2))}{p_1/(q_1(1-p_1))} \leq 1$

Also ist Y fallend.

Beweis von Teil 2

Da X wachsend und Y fallend ist, liefert Theorem 3.8

$$\phi_{p_1, q_1}(XY) \leq \phi_{p_1, q_1}(X) \phi_{p_1, q_1}(Y).$$

Eingesetzt in die allgemeine Identität ergibt sich analog zu Teil 1:

$$\phi_{p_2, q_2}(X) \leq \phi_{p_1, q_1}(X) \quad \text{für jede wachsende } X,$$

also $\phi_{p_1, q_1} \geq_{\text{st}} \phi_{p_2, q_2}$. ■