

Langreichweitige Ordnung in Random-Field Modellen

Leon Krause

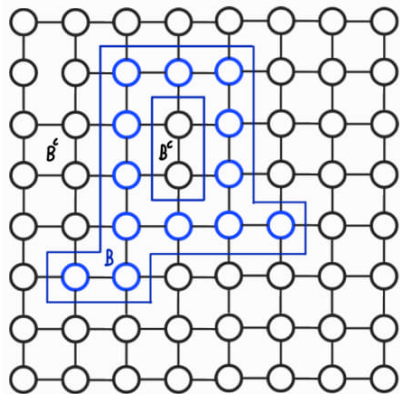
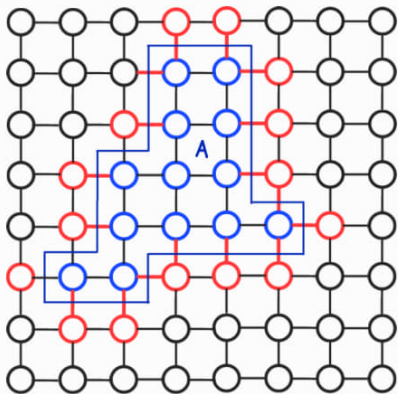
3. Juli 2026

- Vorstellung und Diskussion von Random-Field Modellen;
Bedeutung von langreichweitiger Ordnung
- Beweis langreichweitiger Ordnung für das RFIM

Notationen und Eigenschaften

Mit $\mathcal{U}$ wollen wir die Menge der einfach zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{Z}^d$ bezeichnen.

Mit $\partial A = \{(u, v) : u \sim v, u \in A, v \in A^c\}$ bezeichnen wir den Rand einer Menge A .



Eigenschaft des Randes

Wir bemerken ohne Beweis: Es gilt

$$|\{A \in \mathcal{U} : |\partial A| = n\}| \leq (2dn)^d (16d^3)^{2n}.$$

Einführung - Normales Ising-Modell

Bislang: Modelle die eine Kopplung in ihren Spins zulassen. Wir haben dazu einen Hamiltonian ($\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, \sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$)

$$H^{\pm, \Lambda}(\sigma) = - \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda} \sigma_v \sigma_u \pm \sum_{u \sim v, u \in \Lambda, v \in \Lambda^c} \sigma_u \right),$$

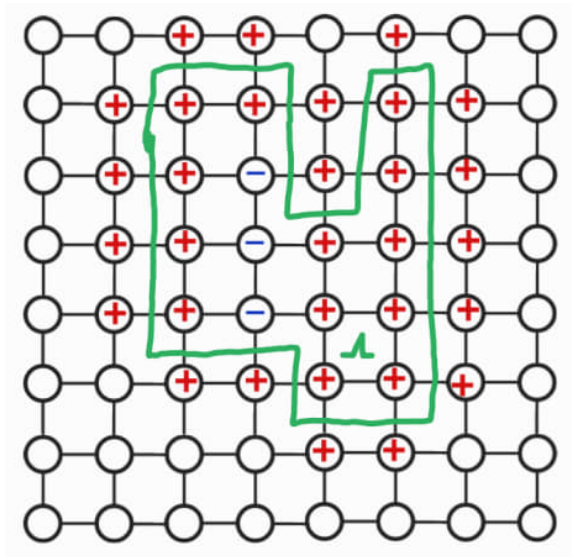
eine Partitionsfunktion

$$Z_{T, \Lambda}^{\pm} = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} e^{-\frac{1}{T} H^{\pm, \Lambda}(\sigma)},$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{T, \Lambda}^{\pm}(\sigma) = \frac{1}{Z_{T, \Lambda}^{\pm}} e^{-\frac{1}{T} H^{\pm, \Lambda}(\sigma)}.$$

Normales Ising-Modell



Random Field Ising-Modell

Fortan betrachten wir einen W'Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mit zusätzlich $\{h_v : v \in \mathbb{Z}^d\}$ iid Standardnormalverteilte ZVen.

Random Field Ising-Modell

Sei $\epsilon > 0$. Der Hamiltonian des RFIM ist gegeben durch

$$H^{\pm, \Lambda, \epsilon h}(\sigma) = - \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda} \sigma_v \sigma_u \pm \sum_{u \sim v, u \in \Lambda, v \in \Lambda^c} \sigma_u + \sum_{u \in \Lambda} \epsilon h_u \sigma_u \right),$$

die Partitionfunktion

$$Z_{T, \Lambda}^{\pm}(\epsilon h) = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda}} e^{-\frac{1}{T} H^{\pm, \Lambda, \epsilon h}(\sigma)}$$

sowie das W'maß

$$\mu_{T, \Lambda, \epsilon h}^{\pm}(\sigma) = \frac{1}{Z_{T, \Lambda}^{\pm}(\epsilon h)} e^{-\frac{1}{T} H^{\pm, \Lambda, \epsilon h}(\sigma)}.$$

Das gemeinsame Maß

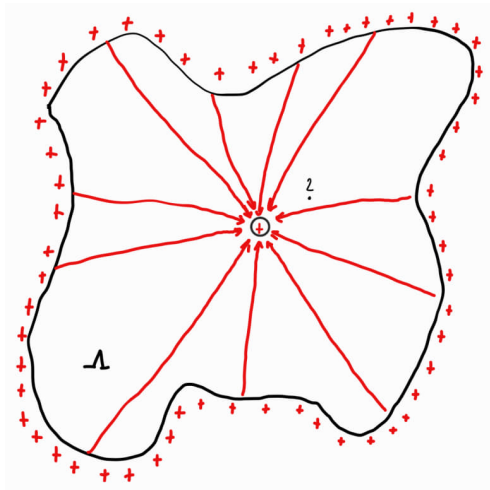
Bei $\mu_{T,\Lambda,\epsilon h}^\pm$ und $Z_{T,\Lambda}^\pm(\epsilon h)$ handelt es sich um Zufallsgrößen, die von $\{h_v\}$ abhängen.

Wir definieren das Joint-Measure für (h, σ) durch

$$\mathbb{Q}_{T,\Lambda_N,\epsilon}^\pm(h \in A, \sigma \in B) = \int_A \mu_{T,\Lambda,\epsilon h}^\pm(B) d\mathbb{P}(h).$$

Was wollen wir zeigen ?

Die Kopplung der Spins begünstigt, dass benachbarte Knoten den gleichen Spin tragen. Überträgt sich die Randbedingung auf den Ursprung, auch wenn das betrachtete Volumen sehr groß wird ?



Hauptresultat

$$\Lambda_N = [-N, N]^d$$

Satz

Für $d \geq 3$ existiert eine Konstante $c > 0$, sodass für alle $0 \leq T, \epsilon \leq c$ und alle $N \geq 1$

$$\mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\sigma_0 = 1) \geq 1 - e^{-c/T} - e^{-c/\epsilon^2}$$

gilt.

Hauptresultat

Es lässt sich zeigen, dass aus

$$\mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\sigma_0 = 1) \geq 1 - e^{-c/T} - e^{-c/\epsilon^2}$$

folgt, dass

$$\mathbb{P}(\mu_{T, \Lambda_N, \epsilon h}^+(\sigma_0 = 1) \geq 1 - e^{-c/T} - e^{-c/\epsilon^2}) \geq 1 - e^{-c/T} - e^{-c/\epsilon^2}$$

gilt.

Beweisidee

Wir wollen eine geeignete Menge $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\Lambda_N})$ finden, sodass wir durch folgende Abschätzung an's Ziel kommen:

$$\mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\sigma_0 = 1) \leq \mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\{\sigma_0 = 1\} \cap \mathcal{E}) + \mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\mathcal{E}^c).$$

Per Konstruktion soll dabei schon $\mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^+(\mathcal{E}^c) \leq e^{-c/\epsilon^2}$ sein.
Wie finden wir eine solche Menge ?

Lemma

Sei $d \geq 3$. Für eine Familie von Zufallsvariablen $(F_{A,\epsilon})_{A \in \mathbb{Z}^d}$ gelte es existieren $c, C > 0$, sodass für alle $z, \epsilon > 0$ und $A, B \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}(|F_{A,\epsilon}| \geq z) \leq C \exp\left(-\frac{cz^2}{\epsilon^2|A|}\right) \quad (1)$$

und

$$\mathbb{P}(|F_{A,\epsilon} - F_{B,\epsilon}| \geq z) \leq C \exp\left(-\frac{cz^2}{\epsilon^2|A \oplus B|}\right) \quad (2)$$

gilt. Dann gibt es Konstanten $\tilde{c}, \tilde{C} > 0$ die nur von c, C und d abhängen, sodass

$$\mathbb{P}(\exists A \in \mathcal{U} : |F_{A,\epsilon}| \geq z|\partial A|) \leq \tilde{C} \exp\left(-\frac{\tilde{c}z^2}{\epsilon^2}\right) \quad (3)$$

gilt.

Der Flip und die Freie Energiedifferenz

Für $A \subset \mathbb{Z}^d$ definieren wir den Flip

$$h_v^A = \begin{cases} h_v & , \text{ falls } v \in A^c \\ -h_v & , \text{ falls } v \in A \end{cases}$$

und

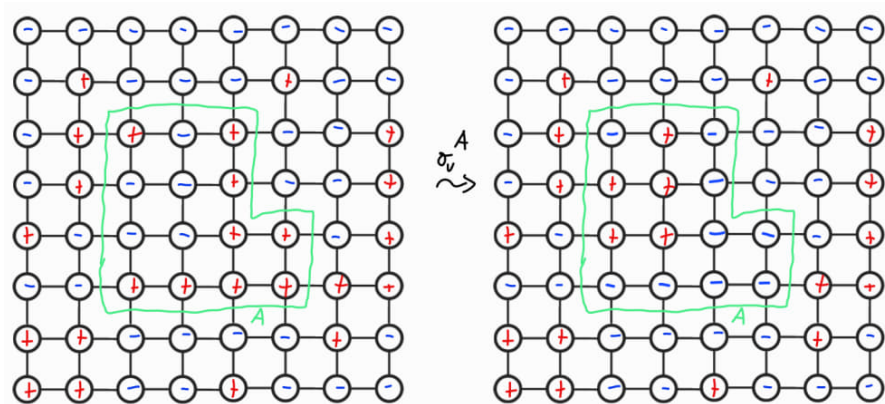
$$\sigma_v^A = \begin{cases} \sigma_v & , \text{ falls } v \in A^c \\ -\sigma_v & , \text{ falls } v \in A \end{cases}$$

Wir wollen das Lemma auf die freie Energiedifferenz

$$\Delta_A(h) = \mathcal{F}^+(\epsilon h) - \mathcal{F}^+(\epsilon h^A) = -T \log Z^+(\epsilon h) + T \log Z^+(\epsilon h^A).$$

anwenden.

Bild



Freie Energiedifferenz

Wir wollen zeigen, dass

$$1. \quad \mathbb{P}\left(|\Delta_A(h)| \geq \lambda \mid \{h_v : v \in A^c\}\right) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8\epsilon^2|A|}}$$

und

$$2. \quad \mathbb{P}\left(|\Delta_A(h) - \Delta_{A'}(h)| \geq \lambda \mid \{h_v : v \in (A \cup A')^c\}\right) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8\epsilon^2|A \oplus A'|}}$$

gelten.

Denn dann gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{A \in \mathcal{U}} \frac{|\Delta_A(h)|}{|\partial A|} \geq 1\right) &\leq \mathbb{P}(\exists A \in \mathcal{U} : |\Delta_A(h)| \geq (1 - \delta)|\partial A|) \\ &\leq \exp(-c/\epsilon^2) \end{aligned}$$

Lemma

Für $A, A' \subset \Lambda_N$ und $\lambda > 0$ haben wir folgende Abschätzungen

$$\mathbb{P}\left(|\Delta_A(h)| \geq \lambda \middle| \sigma(\{h_v : v \in A^c\})\right) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8\epsilon^2|A|}}$$

und

$$\mathbb{P}\left(|\Delta_A(h) - \Delta_{A'}(h)| \geq \lambda \middle| \sigma(\{h_v : v \in (A \cup A')^c\})\right) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8\epsilon^2|A \oplus A'|}}$$

wobei $A \oplus A'$ die symmetrische Differenz von A und A' ist.

Konzentrationsungleichung

Für $(X_1, \dots, X_n)$ iid standardnormalverteilte Zufallsvariablen und eine Lipschitzstetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante L gilt, dass die Zufallsvariable $f(X) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)]$ Subgauß verteilt mit Parameter $\leq L$ ist. Es gilt also

$$\mathbb{P}(|f(X) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)]| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2L^2}}. \quad (4)$$

Charakterisierung der bedingten Erwartung

Eine $\mathcal{F}$ -messbare und integrierbare beziehungsweise nicht-negative Zufallsgröße Y ist genau dann eine Version des bedingten Erwartungswertes $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ einer integrierbaren beziehungsweise nicht-negativen Zufallsgröße X , wenn für alle beschränkten beziehungsweise nicht-negativen und $\mathcal{F}$ -messbaren Zufallsgrößen Z gilt:

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(YZ).$$

Sprich: Zeige

$$\mathbb{E}(u\Delta_A) = 0 \quad \forall u \text{ } \sigma(h_{A^c})\text{-messbar.}$$

dann ist $\mathbb{E}(\Delta_A(h) | \sigma(h_{A^c})) = 0$ $\mathbb{P}$ -fast sicher.

Faktorisierungslemma

Sei $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung der Menge Ω in den Messraum $(\Omega', \mathcal{A}')$ und sei $Z : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Funktion auf Ω . Dann ist Z genau dann $\sigma(Y)\text{-}\overline{\mathcal{B}}$ -messbar, wenn es eine messbare numerische Funktion g auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ gibt mit

$$Z = g \circ Y.$$

Sei

$$\mathcal{G} := \sigma(h_v : v \in A^c) = \sigma(h_{A^c})$$

und sei

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

eine beschränkte $\mathcal{G}$ -messbare Abbildung. Die Abbildung

$$h_{A^c} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{A^c}, \omega \mapsto (h_v)_{v \in A^c}$$

ist $\sigma(h_{A^c})$ -messbar. Nach dem Faktorisierungslemma existiert eine Abbildung

$$\bar{u} : \mathbb{R}^{A^c} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u = \bar{u} \circ h_{A^c}.$$

Beweis

Da u $\mathcal{G}$ -messbar ist, hängt u nur vom Zufallsfeld auf A^c ab. Wir können in der faktorisierten Darstellung von u das h_{A^c} also auch flippen $u = \bar{u} \circ h_{A^c} = \bar{u} \circ h_{A^c}^A$.

Außerdem gilt

$$\Delta_A(h^A) = \mathcal{F}^+(h^A) - \mathcal{F}^+((h^A)^A) = \mathcal{F}^+(h^A) - \mathcal{F}(h) = -\Delta_A(h).$$

Da h_v Standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind, haben h und h^A die gleiche Verteilung, das heißt es gilt $\mathbb{E}(f(h)) = \mathbb{E}(f(h^A))$ für alle messbaren f . Mit $f(h) = (\bar{u} \circ h_{A^c})\Delta_A(h)$ folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\bar{u} \circ h_{A^c})\Delta_A(h)) &= \mathbb{E}((\bar{u} \circ h_{A^c}^A)\Delta_A(h^A)) \\ &= \mathbb{E}((\bar{u} \circ h_{A^c}^A)(-\Delta_A(h))) \\ &= -\mathbb{E}((\bar{u} \circ h_{A^c})\Delta_A(h)).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{E}(u\Delta_A) = 0 \quad \forall u \text{ } \sigma(h_{A^c})\text{-messbar.}$$

Mit der Charakterisierung der bedingten Erwartung folgt schließlich

$$\mathbb{E}(\Delta_A(h)|\sigma(h_{A^c})) = 0 \quad \mathbb{P} - \text{fast sicher.}$$

Beweis

Nun wollen wir die Konzentrationsungleichung anwenden; Wie finden wir geeignete Lipschitz-Konstante?

Mithilfe des mehrdimensionalen Mittelwertsatzes folgt für auf einer offenen, konvexen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbares f , dass für alle $x, y \in G$ ein x_0 existiert, sodass folgende Darstellung gilt

$$f(x) - f(y) = \nabla f(x_0) \cdot (x - y). \quad (5)$$

Insbesondere also

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{z \in G} \|\nabla f(z)\|_2 \|x - y\|_2. \quad (6)$$

Wir kommen also durch den Gradienten an eine Lipschitz-Konstante!

Beweis

Durch Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial h_v} \Delta_A(h) \right| &= \left| \frac{\sum_{\sigma} \epsilon \sigma_v e^{-\frac{1}{T} H^{+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma)}}{Z^{+}(\epsilon h)} - \frac{\sum_{\sigma} \epsilon \sigma_v e^{-\frac{1}{T} H^{+, \Lambda_N, \epsilon h^A}(\sigma)}}{Z^{+}(\epsilon h^A)} \right| \\ &= \epsilon \left| \langle \sigma_v \rangle_{\mu_{T, \Lambda_N, \epsilon h}^{+}} - \langle \sigma_v \rangle_{\mu_{T, \Lambda_N, \epsilon h^A}^{+}} \right| \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Mit dieser Ungleichung können wir den Gradienten abschätzen

$$\begin{aligned} \|\nabla_A \Delta_A(h)\|_2^2 &= \sum_{v \in A} \left| \frac{\partial}{\partial h_v} \Delta_A(h) \right|^2 \\ &\leq \sum_{v \in A} 4\epsilon^2 = |A| 4\epsilon^2. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|\nabla_A \Delta_A(h)\|_2 \leq |A|^{1/2} 2\epsilon.$$

Da $\mathbb{E}(\Delta_A(h) | \sigma(h_{A^c})) = 0$ $\mathbb{P}$ -fast sicher ist, ist $\Delta_A(h)$ unter dem W -maß $\mathbb{P}(\cdot | \sigma(\{h_v : v \in A^c\}))$ Subgauß mit Parameter $\leq |A|^{1/2} 2\epsilon$ verteilt.

Also

$$\mathbb{P}\left(|\Delta_A(h)| \geq \lambda | \{h_v : v \in A^c\} \right) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{8\epsilon^2 |A|}},$$

was zu zeigen war.

Beweis

Für die zweite Aussage kann man zeigen, dass $\Delta_A(h) - \Delta_{A'}(h)$ in Verteilung gleich $\Delta_{A \oplus A'}(h)$ ist. Dann kann man auf $\Delta_{A \oplus A'}(h)$ die erste Aussagen anwenden und erhält die zweite Aussage.

Die Menge $\mathcal{E}$

Für die freie Energiedifferenz gilt

$$\Delta_A(h) = T \log \left(\frac{Z^+(\epsilon h^A)}{Z^+(\epsilon h)} \right). \quad (7)$$

Nun ist

$$\frac{Z^+(\epsilon h^A)}{Z^+(\epsilon h)} \leq e^{|\partial A|/T} \quad (8)$$

äquivalent zu

$$T \log \left(\frac{Z^+(\epsilon h^A)}{Z^+(\epsilon h)} \right) = \Delta_A(h) \leq |\partial A|. \quad (9)$$

Damit ist das Ereignis

$$\mathcal{E} = \left\{ \sup_{A \in \mathcal{U}} \frac{Z^+(\epsilon h^A)}{Z^+(\epsilon h)} \leq e^{|\partial A|/T} \right\} \quad (10)$$

äquivalent zu

$$\mathcal{E} = \left\{ \sup_{A \in \mathcal{U}} \frac{\Delta_A(h)}{|\partial A|} \leq 1 \right\}. \quad (11)$$

Die Menge $\mathcal{E}$

Für das Komplement gilt nun

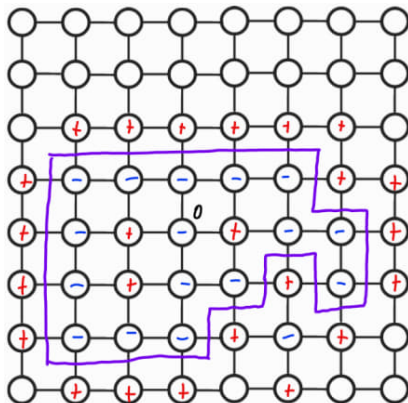
$$\mathcal{E}^c = \left\{ \sup_{A \in \mathcal{U}} \frac{\Delta_A(h)}{|\partial A|} > 1 \right\} \subset \left\{ \sup_{A \in \mathcal{U}} \frac{|\Delta_A(h)|}{|\partial A|} \geq 1 \right\}.$$

Es gilt also

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \leq \exp(-c/\epsilon^2).$$

Das Flipping-Argument

Zu einer Konfiguration σ mit $\sigma_0 = -1$ konstruieren wir nun eine einfach zusammenhängende Menge A_σ , die einerseits aus der den Ursprung enthaltenden zusammenhängenden Komponente aller Knoten i mit $\sigma_i = -1$ und andererseits aus den Knoten, die von dieser Komponente eingeschlossen werden, besteht. Damit gilt $\mathcal{A}_\sigma \in \mathcal{U}$ für σ mit $\sigma_0 = -1$.



Das Flipping-Argument

Wir sind an der Energiedifferenz

$$-H^{+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma) + H^{+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma^{\mathcal{A}_\sigma})$$

interessiert. Wir betrachten also den Flip

$$(h, \sigma) \mapsto (h^{\mathcal{A}_\sigma}, \sigma^{\mathcal{A}_\sigma}),$$

und bemerken folgende Tatsachen: Falls $(u, v) \in \partial \mathcal{A}_\sigma$ gilt $\sigma_u \sigma_v = -1$ und $\sigma_u^{\mathcal{A}_\sigma} \sigma_v^{\mathcal{A}_\sigma} = 1$ denn ursprünglich ist einer der beiden Spins negativ, nach dem Flip wird der negative Spin positiv. Ein Kantenprodukt $\sigma_u \sigma_v$ ändert sich auch nur dann, wenn genau ein Endpunkt in $\mathcal{A}_\sigma$ liegt.

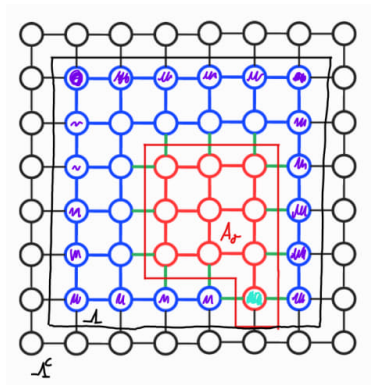
$$\sigma_u^{\mathcal{A}_\sigma} \sigma_v^{\mathcal{A}_\sigma} = \begin{cases} \sigma_u \sigma_v, & \text{falls } u, v \in \mathcal{A}_\sigma, \\ \sigma_u \sigma_v, & \text{falls } u, v \notin \mathcal{A}_\sigma, \\ -\sigma_u \sigma_v, & \text{falls genau ein } u, v \in \mathcal{A}_\sigma. \end{cases}$$

Das Flipping-Argument

$$\begin{aligned}
 & -H^{+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma) + H^{+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma^{\mathcal{A}_\sigma}) \\
 &= \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda_N} \sigma_v \sigma_u + \sum_{u \sim v, u \in \Lambda_N, v \in \Lambda_N^c} \sigma_u + \sum_{u \in \Lambda_N} \epsilon h_u \sigma_u \right) \\
 & - \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda_N} \sigma_v^{\mathcal{A}_\sigma} \sigma_u^{\mathcal{A}_\sigma} + \sum_{u \sim v, u \in \Lambda_N, v \in \Lambda_N^c} \sigma_u^{\mathcal{A}_\sigma} + \sum_{u \in \Lambda_N} \epsilon h_u^{\mathcal{A}_\sigma} \sigma_u^{\mathcal{A}_\sigma} \right) \\
 &= \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda_N} \sigma_v \sigma_u + \sum_{u \sim v, u \in \Lambda_N, v \in \Lambda_N^c} \sigma_u + \sum_{u \in \Lambda_N} \epsilon h_u \sigma_u \right) \\
 & - \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma} \sigma_v \sigma_u + \sum_{u \sim v, u, v \in \mathcal{A}_\sigma} \sigma_v \sigma_u + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma}} -\sigma_v \sigma_u + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N^c}} \sigma_u \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N^c}} -\sigma_u + \sum_{u \in \Lambda_N} \epsilon \sigma_u h_u \right) \\
 &= 2 \left(\sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma}} \sigma_v \sigma_u + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N^c}} \sigma_u \right) = -2|\partial \mathcal{A}_\sigma|
 \end{aligned}$$

Bild

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{u \sim v, u, v \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma} \sigma_v \sigma_u + \sum_{u \sim v, u, v \in \mathcal{A}_\sigma} \sigma_v \sigma_u + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma}} -\sigma_v \sigma_u + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \Lambda_N \setminus \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N^c}} \sigma_u \right. \\
 & \left. + \sum_{\substack{u \sim v, u \in \mathcal{A}_\sigma \\ v \in \Lambda_N^c}} -\sigma_u \right)
 \end{aligned}$$



Die gemeinsame Dichte

Ausgehend von dem Joint Measure

$$\mathbb{Q}_{T, \Lambda_N, \epsilon}^{\pm}(h \in A, \sigma \in B) = \int_A \mu_{T, \Lambda, \epsilon h}^{\pm}(B) d\mathbb{P}(h),$$

können wir auch die gemeinsame Dichte

$$\nu^+(h, \sigma) = \prod_{u \in \Lambda_N} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} h_u^2} \right) \times \frac{e^{-\frac{1}{T} H^+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma)}{Z^+(\epsilon h)}. \quad (12)$$

betrachten. Der Teil der Dichte assoziiert mit h ist stetig, der Teil assoziiert mit σ ist diskret.

Die gemeinsame Dichte

Wir halten fest, dass

$$\begin{aligned}\frac{\nu^+(h, \sigma)}{\nu^+(h^{\mathcal{A}_\sigma}, \sigma^{\mathcal{A}_\sigma})} &= \frac{Z^+(\epsilon h^{\mathcal{A}_\sigma})}{Z^+(\epsilon h)} \times \frac{e^{-\frac{1}{T} H^+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma)}{e^{-\frac{1}{T} H^+, \Lambda_N, \epsilon h}(\sigma^{\mathcal{A}_\sigma})} \\ &= \frac{Z^+(\epsilon h^{\mathcal{A}_\sigma})}{Z^+(\epsilon h)} \times e^{-\frac{2}{T} |\partial \mathcal{A}_\sigma|}\end{aligned}$$

gilt.

Beweis des Theorems

Nun können wir abschließend den Beweis führen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^+(\sigma_o = -1) &= \mathbb{Q}^+(\{\sigma_0 = -1\} \cap \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^c) \\ &\leq \mathbb{Q}^+(\{\sigma_0 = -1\} \cap \mathcal{E}) + \mathbb{Q}^+(\mathcal{E}^c) \\ &\leq \sum_{A \in \mathcal{U}} \int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h, \sigma) dh + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \\ &\leq \sum_{A \in \mathcal{U}} \frac{\int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h, \sigma) dh}{\int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h^A, \sigma^A) dh} + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c)\end{aligned}$$

Beweis des Theorems

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h, \sigma) dh &= \int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \frac{\nu^+(h, \sigma) dh}{\nu^+(h^A, \sigma^A) dh} \nu^+(h^A, \sigma^A) dh \\ &\leq \sup_{\substack{h \in \mathcal{E} \\ \sigma: A_\sigma = A}} \frac{\nu^+(h, \sigma)}{\nu^+(h^A, \sigma^A)} \int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h^A, \sigma^A) dh \\ \iff \frac{\int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h, \sigma) dh}{\int_{h \in \mathcal{E}} \sum_{\sigma: A_\sigma = A} \nu^+(h^A, \sigma^A) dh} &\leq \sup_{\substack{h \in \mathcal{E} \\ \sigma: A_\sigma = A}} \frac{\nu^+(h, \sigma)}{\nu^+(h^A, \sigma^A)}. \end{aligned}$$

Beweis des Theorems

Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \sum_{A \in \mathcal{U}} \sup_{\substack{h \in \mathcal{E} \\ \sigma: A_\sigma = A}} \frac{\nu^+(h, \sigma)}{\nu^+(h^A, \sigma^A)} + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{U}} \sup_{h \in \mathcal{E}} \left(e^{-\frac{2}{T}|\partial A|} \frac{Z^+(\epsilon h^A)}{Z^+(\epsilon h)} \right) + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{A \in \mathcal{U}, |\partial A| = n} e^{-\frac{2}{T}|\partial A| + \frac{1}{T}|\partial A|} + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} (2dn)^d (16d^3)^{2n} e^{-n/T} + \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \\ &\leq e^{-c/T} + e^{-c/\epsilon^2}.\end{aligned}$$

Beweisstrategie

Allgemeine Beweisstrategie

- Allgemeines Modell mit positiv korrelierter Wechselwirkung + Random-Field

geeigneten
Flip/Rotation/Shift
finden

⇒ Energiegewinn
des Randoms
→ $e^{-\frac{|J|A|}{c}}$

in Abb.

Finde Menge
 $\mathcal{E}$ mit

$$\bullet \sup_{A \in \mathcal{K}} \frac{Z(\mathcal{E} \cup A)}{Z(\mathcal{E})} \leq e^{\frac{|J|A|}{2c}}$$

$$\bullet \mathbb{P}(\mathcal{E}^c) \leq e^{-c/\varepsilon^2}$$

Beweis via
union bound

$$\mathbb{Q}^+(\sigma_0 = +) \leq \mathbb{Q}^+(\sigma_0 = - \cap \mathcal{E}) + \mathbb{Q}^+(\mathcal{E}^c)$$

führen.