

Random-Cluster Modelle

Sven Schwanekamp

10. June 2026

Motivation

Was ist das Random Cluster Modell und wofür wird es genutzt?

- 1 RC Modell vereinigt Perkolation und Ising/Potts Modell; bei beiden geht es um Phasenübergänge

Motivation

Was ist das Random Cluster Modell und wofür wird es genutzt?

- 1 RC Modell vereinigt Perkolation und Ising/Potts Modell; bei beiden geht es um Phasenübergänge
- 2 Modell besitzt zwei Parameter:
 - 1 edge-weight p
 - 2 cluster-weight q

Random-Cluster Modell Definition

- ▶ Graph $G=(V,E)$, V =Knoten, E =Kanten
- ▶ e ist Kante mit Endknoten x und y : $e = \langle x, y \rangle$
- ▶ $\Omega = \{0, 1\}^E$, $\omega \in \Omega : \{\omega(e) : e \in E\}$
- ▶ Wir nennen eine Kante offen, wenn $\omega(e) = 1$ und geschlossen, wenn $\omega(e) = 0$
- ▶ Definiere außerdem $\eta(\omega) = \{e \in E : \omega(e) = 1\}$ als Menge aller offenen Kanten
- ▶ Definiere $F \subseteq E$ mit $F = \eta(\omega)$

Random-Cluster Modell Definition

Sei $k(\omega)$ die Nummer verknüpfter Komponenten.

Dann definieren wir das Random Cluster Maß durch:

$$1.1 \quad \phi_{p,q} = \frac{1}{Z_{RC}} \{ \prod_{e \in E} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} \} q^{k(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$

► wobei Z_{RC} , die Partitionsfunktion, gegeben ist durch

$$1.2 \quad Z_{RC} = Z_{RC}(p, q) = \sum_{\omega \in \Omega} \{ \prod_{e \in E} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} \} q^{k(\omega)}$$

Ising Modell

- ▶ beschreibt Ferromagnetismus in Festkörpern
- ▶ Spins von Ionen nehmen zwei verschiedene Richtungen an $(-1,1)$
- ▶ Spinrichtungen zufällig gewählt zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaßfunktion, dem sogenannten „Gibbs-Zustand“ durch Wechselwirkungen zwischen benachbarten Teilchen

Ising Modell Definition

- ▶ Sei $G=(V,E)$ wieder Graph
- ▶ Es gibt zwei Spinrichtungen, daher definieren wir die Menge $\Sigma = \{-1, 1\}^V$
- ▶ Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $\lambda_{\beta,J,h}$ ist von den drei Parametern $\beta, J \in [0, \infty]$

und $h \in \mathbb{R}$ abhängig und ist gegeben durch:

1.3 $\lambda_{\beta,J,h} = \frac{1}{Z_I} e^{-\beta H(\sigma)}$ mit der Partitionsfunktion Z_I und der Hamiltonfunktion H :

1.4 $Z_I = \sum_{\sigma \in \Sigma} e^{-\beta H(\sigma)}$ und
 $H(\sigma) = -J \sum_{e=\langle x,y \rangle \in E} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in V} \sigma(x).$

Ising Modell Definition

- ▶ β ist der Kehrwert $\frac{1}{T}$
- ▶ J ist die Stärke der Wechselwirkungen zwischen Nachbarn
- ▶ h ist das äußere Magnetfeld (Vereinfachung $h=0$)

Potts-Modell

- ▶ Weiterentwicklung vom Ising Modell
- ▶ $q \geq 2$, $\Sigma = \{1, 2, \dots, q\}^V$
- ▶ wir definieren $e = \langle x, y \rangle$ als die Kante von x und y und $\sigma = \{\sigma_x : x \in V\} \in \Sigma$
- ▶ $\delta_e(\sigma) = \delta_{\sigma_x, \sigma_y}$ ist das Kronecker Delta
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion ist dann:

$$1.5 \quad \pi_{\beta, q}(\sigma) = \frac{1}{Z_p} e^{\beta \sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)}$$

Verknüpfung zwischen Random Cluster und Potts Modell

- ▶ Konstruktion von zwei Systemen auf einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Edward-Sokal Coupling)
- ▶ Sei $q \in \{2, 3, \dots\}$, $p \in [0, 1]$, $G = (V, E)$
- ▶ Dann betrachten wir den Produktraum $\Sigma \times \Omega$ mit $\Sigma = \{1, 2, \dots, q\}^V$ und $\Omega = \{0, 1\}^E$
- ▶ wir verknüpfen also die Spins der Knoten mit den Kantenkonfigurationen der Kanten

Verknüpfung zwischen Random Cluster und Potts Modell

- ▶ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mu(\sigma, \omega)$ auf $\Omega \times \Sigma$ lautet dann:

$$1.6 \quad \mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}, \quad \sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$$

$$1.7 \quad \mu(\sigma, \omega) \propto \psi(\sigma)\phi_p(\omega)1_F(\sigma, \omega)$$

Theorem 1.10

- ▶ Aussagen über die Randmaße von μ
- ▶ Sei $q \in \{2, 3, \dots\}$, $p \in [0, 1]$ und nehme an, dass $p = 1 - e^{-\beta}$
 - a Die Randverteilung $\mu_1(\sigma) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega)$ auf Σ ist genau das Potts Maß: $\mu_1(\sigma) = \frac{1}{Z_p} \exp\{\beta \sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)\}$, $\sigma \in \Sigma$
 - b Die Randverteilung $\mu_2(\omega) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega)$ auf Ω ist das Random Cluster Maß:
$$\mu(\omega) = \frac{1}{Z_{RC}} \left\{ \prod_{e \in E} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} \right\} q^{k(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$
 - c Partitionsfunktionen: Es gilt:
$$\sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \prod_{e \in E} p^{\omega(e)} (1-p)^{1-\omega(e)} \right\} q^{k(\omega)} = \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{e \in E} \exp[\beta(\delta_e(\sigma) - 1)], \text{ das hei\ss}t:$$
$$Z_{RC}(p, q) = e^{-\beta|E|} Z_p(\beta, q)$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ a) z.Z.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega) = \pi_{\beta, q}(\sigma)$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ a) z.Z.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega) = \pi_{\beta, q}(\sigma)$
- ▶ Aus 1.6 haben wir die Formel:
$$\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ a) z.Z.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega) = \pi_{\beta, q}(\sigma)$
- ▶ Aus 1.6 haben wir die Formel:
$$\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}$$
- ▶ Summieren über alle ω :
$$\sum_{\omega \in \Omega} \prod_{e \in E} [(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)]$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ a) z.Z.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega) = \pi_{\beta, q}(\sigma)$
- ▶ Aus 1.6 haben wir die Formel:
$$\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}$$
- ▶ Summieren über alle ω :
$$\sum_{\omega \in \Omega} \prod_{e \in E} [(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)]$$
- ▶ da die Kanten unabhängig voneinander betrachtet werden, kann die Summe in das Produkt gezogen werden und da die Kantenkonfiguration $\omega(e) = 1$ oder $\omega(e) = 0$ ist, ergibt sich:
- ▶ $\prod_{e \in E} (1 - p) + p\delta_e(\sigma)$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ a) z.Z.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\sigma, \omega) = \pi_{\beta, q}(\sigma)$
- ▶ Aus 1.6 haben wir die Formel:
$$\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}$$
- ▶ Summieren über alle ω :
$$\sum_{\omega \in \Omega} \prod_{e \in E} [(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)]$$
- ▶ $\prod_{e \in E} (1 - p) + p\delta_e(\sigma)$
- ▶ $p = 1 - e^{-\beta} \Leftrightarrow 1 - p = e^{-\beta}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ 2 Fälle: $\delta_e(\sigma) = 0 \Rightarrow e^{-\beta}$ oder $\delta_e(\sigma) = 1 \Rightarrow 1 - p + p$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ 2 Fälle: $\delta_e(\sigma) = 0 \Rightarrow e^{-\beta}$ oder $\delta_e(\sigma) = 1 \Rightarrow 1 - p + p$
- ▶ $1 - p + p\delta_e(\sigma) = e^{\beta(\delta_e-1)}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ 2 Fälle: $\delta_e(\sigma) = 0 \Rightarrow e^{-\beta}$ oder $\delta_e(\sigma) = 1 \Rightarrow 1 - p + p$
- ▶ $1 - p + p\delta_e(\sigma) = e^{\beta(\delta_e-1)}$
- ▶ $\prod_{e \in E} e^{\beta(\delta_e(\sigma)-1)} = e^{\beta(\sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)-1)}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ 2 Fälle: $\delta_e(\sigma) = 0 \Rightarrow e^{-\beta}$ oder $\delta_e(\sigma) = 1 \Rightarrow 1 - p + p$
- ▶ $1 - p + p\delta_e(\sigma) = e^{\beta(\delta_e-1)}$
- ▶ $\prod_{e \in E} e^{\beta(\delta_e(\sigma)-1)} = e^{\beta(\sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)-1)}$
- ▶ Durch Ausmultiplizieren, erhält man dann:
 $e^{-\beta|E|} e^{\sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ 2 Fälle: $\delta_e(\sigma) = 0 \Rightarrow e^{-\beta}$ oder $\delta_e(\sigma) = 1 \Rightarrow 1 - p + p$
- ▶ $1 - p + p\delta_e(\sigma) = e^{\beta(\delta_e-1)}$
- ▶ $\prod_{e \in E} e^{\beta(\delta_e(\sigma)-1)} = e^{\beta(\sum_{e \in E} \delta_e(\sigma)-1)}$
- ▶ Durch Ausmultiplizieren, erhält man dann:
 $e^{-\beta|E|} e^{\sum_{e \in E} \beta \delta_e(\sigma)}$
- ▶ Bis auf die Konstante $e^{-\beta|E|}$, die nicht von den Spins σ abhängt, ist das genau das Potts-Maß

Beweis Theorem 1.10

► b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\}$
- ▶ 2 Fälle: $\omega(e) = 1 \Rightarrow p\delta_e(\sigma)$ und $\omega(e) = 0 \Rightarrow 1-p$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\}$
- ▶ 2 Fälle: $\omega(e) = 1 \Rightarrow p\delta_e(\sigma)$ und $\omega(e) = 0 \Rightarrow 1-p$
- ▶ $p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|} 1_F(\sigma, \omega)$,
wobei $F = \{(\sigma, \omega) : \delta_e(\sigma) = 1\}$ und

$$1_F(\sigma, \omega) = \begin{cases} \{1, & \text{falls } (\sigma, \omega) \in F, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\}$
- ▶ 2 Fälle: $\omega(e) = 1 \Rightarrow p\delta_e(\sigma)$ und $\omega(e) = 0 \Rightarrow 1-p$
- ▶ $p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|}1_F(\sigma, \omega)$,
wobei $F = \{(\sigma, \omega) : \delta_e(\sigma) = 1\}$ und

$$1_F(\sigma, \omega) = \begin{cases} \{1, & \text{falls } (\sigma, \omega) \in F, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ $\sum_{\sigma \in \Sigma} 1_F(\sigma, \omega) = q^{k(\omega)}$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ b) z.Z: $\sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega) = \phi_{p,q}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\}$
- ▶ 2 Fälle: $\omega(e) = 1 \Rightarrow p\delta_e(\sigma)$ und $\omega(e) = 0 \Rightarrow 1-p$
- ▶ $p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|} 1_F(\sigma, \omega)$,
wobei $F = \{(\sigma, \omega) : \delta_e(\sigma) = 1\}$ und

$$1_F(\sigma, \omega) = \begin{cases} \{1, & \text{falls } (\sigma, \omega) \in F, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ $\sum_{\sigma \in \Sigma} 1_F(\sigma, \omega) = q^{k(\omega)}$
- ▶ Also insgesamt:
$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{e \in E} \{(1-p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\} = p^{|\eta(\omega)|}(1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|} q^{k(\omega)}$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ c) Wir haben in a) und b) gezeigt, dass $\sum_{\omega} \mu(\sigma, \omega)$ zum Potts-Modell und $\sum_{\sigma} \mu(\sigma, \omega)$ zum Random Cluster Modell führt.

Beweis Theorem 1.10

- ▶ c) Wir haben in a) und b) gezeigt, dass $\sum_{\omega} \mu(\sigma, \omega)$ zum Potts-Modell und $\sum_{\sigma} \mu(\sigma, \omega)$ zum Random Cluster Modell führt.
- ▶ beide Rechnungen starten aber mit der gleichen gemeinsamen Verteilung, daher gilt:

$$\sum_{\sigma} \sum_{\omega} \mu(\sigma, \omega) = \sum_{\omega} \sum_{\sigma} \mu(\sigma, \omega)$$

Beweis Theorem 1.10

- ▶ c) Wir haben in a) und b) gezeigt, dass $\sum_{\omega} \mu(\sigma, \omega)$ zum Potts-Modell und $\sum_{\sigma} \mu(\sigma, \omega)$ zum Random Cluster Modell führt.
- ▶ beide Rechnungen starten aber mit der gleichen gemeinsamen Verteilung, daher gilt:
$$\sum_{\sigma} \sum_{\omega} \mu(\sigma, \omega) = \sum_{\omega} \sum_{\sigma} \mu(\sigma, \omega)$$
- ▶ Daher erhalten wir die gleichen Partitionsfunktionen außer der Konstanten $e^{-\beta|E|}$

Theorem 1.13

- ▶ Bedingte Verteilungen von $\mu(\sigma, \omega)$
- ▶ Sei $q \in \{2, 3, \dots\}$ und nehme an: $p = 1 - e^{-\beta}$ Dann gilt:
- ▶ a) Für $\omega \in \Omega$ erhält man die bedingte Maßfunktion $\mu(\cdot, \omega)$ auf Σ , indem man zufällige Spins auf ganze Cluster von ω , von denen es $k(\omega)$ gibt, legt. Diese Spins sind auf den gegebenen Clustern konstant, zwischen den Clustern unabhängig und jeder gleichmäßig über die Menge $\{1, 2, \dots, q\}$ verteilt.
- ▶ b) Für $\sigma \in \Sigma$ erhält man die bedingte Maßfunktion $\mu(\cdot, \sigma)$ auf Ω wie folgt:
Wenn $e = \langle x, y \rangle$ so ist, dass $\sigma_x \neq \sigma_y$ setzen wir $\omega(e) = 0$,
wenn $\sigma_x = \sigma_y$, setzen wir:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei die Werte der verschiedenen $\omega(e)$ (bedingt)
unabhängige Zufallsvariablen sind

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ Theorem 1.10b): $\mu_2(\omega) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega)$ auf Ω

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ Theorem 1.10b): $\mu_2(\omega) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega)$ auf Ω
- ▶ Einsetzen liefert: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{1_F(\sigma, \omega)}{q^{k(\omega)}}$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ Theorem 1.10b): $\mu_2(\omega) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega)$ auf Ω
- ▶ Einsetzen liefert: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{1_F(\sigma, \omega)}{q^{k(\omega)}}$
- ▶ Für zulässige Färbungen gilt also: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{1}{q^{k(\omega)}}$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ a)bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{\mu(\sigma, \omega)}{\mu(\omega)}$
- ▶ Aus 1.6: $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\}$,
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ Theorem 1.10b): $\mu_2(\omega) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(\sigma, \omega)$ auf Ω
- ▶ Einsetzen liefert: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{1_F(\sigma, \omega)}{q^{k(\omega)}}$
- ▶ Für zulässige Färbungen gilt also: $\mu(\sigma \mid \omega) = \frac{1}{q^{k(\omega)}}$
- ▶ Alle zulässigen Färbungen haben die gleiche Wahrscheinlichkeit und sind gleichverteilt über die Menge Σ

Beweis Theorem 1.13

► b) $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ b) $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ σ sind fest $\Rightarrow \delta_e(\sigma)$ ist auch fest

Beweis Theorem 1.13

- ▶ b) $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ σ sind fest $\Rightarrow \delta_e(\sigma)$ ist auch fest
- ▶ Fall 1: $\delta_e(\sigma) = 0$, dann fällt der hintere Term weg und wir haben nur noch den Faktor $(1 - p)\delta_{\omega(e), 0}$. Nehme an, dass die Kante offen wäre, dann fällt auch dieser Faktor weg
→ offene Kanten zwischen verschiedenen Spins nicht möglich

Beweis Theorem 1.13

- ▶ b) $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ σ sind fest $\Rightarrow \delta_e(\sigma)$ ist auch fest
- ▶ Fall 1: $\delta_e(\sigma) = 0$, dann fällt der hintere Term weg und wir haben nur noch den Faktor $(1 - p)\delta_{\omega(e), 0}$. Nehme an, dass die Kante offen wäre, dann fällt auch dieser Faktor weg
 $\rightarrow$ offene Kanten zwischen verschiedenen Spins nicht möglich
- ▶ Fall 2: $\delta_e(\sigma) = 1$, dann haben wir den Faktor $(1 - p)\delta_{\omega(e), 0} + p\delta_{\omega(e), 1}$

Beweis Theorem 1.13

- ▶ b) $\mu(\sigma, \omega) \propto \prod_{e \in E} \{(1 - p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}\delta_e(\sigma)\},$
 $\sigma, \omega \in \Sigma \times \Omega$
- ▶ σ sind fest $\Rightarrow \delta_e(\sigma)$ ist auch fest
- ▶ Fall 1: $\delta_e(\sigma) = 0$, dann fällt der hintere Term weg und wir haben nur noch den Faktor $(1 - p)\delta_{\omega(e),0}$. Nehme an, dass die Kante offen wäre, dann fällt auch dieser Faktor weg
 $\rightarrow$ offene Kanten zwischen verschiedenen Spins nicht möglich
- ▶ Fall 2: $\delta_e(\sigma) = 1$, dann haben wir den Faktor $(1 - p)\delta_{\omega(e),0} + p\delta_{\omega(e),1}$
- ▶ Das heißt, bei gleichen Spins ist:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$$

Korrelation zwischen Potts-Modell und RC-Modell

- ▶ Es lässt sich zeigen, dass Korrelationen im Potts-Modell offenen Verbindungen im Random-Cluster Modell entsprechen
- ▶ Für unendliche Graphen bedeutet das: Phasenübergang eines Potts-Modells entspricht der Bildung eines unendlichen offenen Clusters im Random Cluster Modell
- ▶ Argumente der stochastischen Geometrie, insbesondere des Perkulationsmodells, können genutzt werden, um Korrelationsstruktur des Potts-Systems zu verstehen

Korrelation zwischen Potts-Modell und RC-Modell

- ▶ dafür: Sei $\{x \leftrightarrow y\}$ Menge aller $\omega \in \Omega$ die Knoten x und y mit einer offenen Kante verbinden
- ▶ Wir definieren die „Zweipunkt-Korrelationsfunktion“ des Potts-Maßes $\pi_{\beta,q}$ auf endlichen Graphen $G=(V,E)$ als $\tau_{\beta,q}$ durch:

$$\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$$

mit $\frac{1}{q}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unabhängige gleichverteilte Spins gleich sind.

- ▶ Dann gilt:
$$\tau_{\beta,q}(x, y) = \frac{1}{q} \pi_{\beta,q}(q \delta_{\sigma_x, \sigma_y} - 1)$$
- ▶ Die Zweipunkt-Verbindungsfunktion des Random-Cluster-Modells $\phi_{p,q}$ ist definiert als $\phi_{p,q}(x \leftrightarrow y)$ als Wahrscheinlichkeit, dass x und y durch offene Kanten verbunden sind

Theorem 1.16

- ▶ Sei $q \in \{2, 3, \dots\}$, $p \in [0, 1)$ und setze $p = 1 - e^{-\beta}$. Dann gilt:
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = (1 - \frac{1}{q})\phi_{p,q}(x \leftrightarrow y)$

Beweis Theorem 1.16

► $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$

Beweis Theorem 1.16

- ▶ $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\sigma, \omega} (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1}) \mu(\sigma, \omega)$

Beweis Theorem 1.16

- ▶ $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\sigma, \omega} (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1}) \mu(\sigma, \omega)$
- ▶ $\mu(\sigma, \omega) = \mu(\sigma \mid \omega) \phi_{p,q}(\omega)$

Beweis Theorem 1.16

- ▶ $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\sigma, \omega} (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1}) \mu(\sigma, \omega)$
- ▶ $\mu(\sigma, \omega) = \mu(\sigma \mid \omega) \phi_{p,q}(\omega)$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\omega} \phi_{p,q}(\omega) \sum_{\sigma} \mu(\sigma \mid \omega) (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1})$

Beweis Theorem 1.16

- ▶ $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\sigma, \omega} (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1}) \mu(\sigma, \omega)$
- ▶ $\mu(\sigma, \omega) = \mu(\sigma \mid \omega) \phi_{p,q}(\omega)$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\omega} \phi_{p,q}(\omega) \sum_{\sigma} \mu(\sigma \mid \omega) (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1})$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\omega} \phi_{p,q}(\omega) \{ (1 - q^{-1}) 1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}}(\omega) + 0 \cdot 1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}}(\omega) \}$

Beweis Theorem 1.16

- ▶ $\tau_{\beta,q} = \pi_{\beta,q}(\sigma_x = \sigma_y) - \frac{1}{q}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\sigma, \omega} (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1}) \mu(\sigma, \omega)$
- ▶ $\mu(\sigma, \omega) = \mu(\sigma \mid \omega) \phi_{p,q}(\omega)$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = \sum_{\omega} \phi_{p,q}(\omega) \sum_{\sigma} \mu(\sigma \mid \omega) (1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}} \sigma - q^{-1})$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) =$
 $\sum_{\omega} \phi_{p,q}(\omega) \{ (1 - q^{-1}) 1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}}(\omega) + 0 \cdot 1_{\{\sigma_x = \sigma_y\}}(\omega) \}$
- ▶ $\tau_{\beta,q}(x, y) = (1 - \frac{1}{q}) \phi_{p,q}(x \leftrightarrow y)$

Grenzwert für $q \downarrow 0$

- ▶ Was passiert wenn q gegen 0 geht
- ▶ $\phi_{p,q} \propto p^{|\eta(\omega)|} (1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|} q^{k(\omega)}$
- ▶ Eine Teilmenge F der Kantenmenge E wird bezeichnet als:
 - ein Wald von G , wenn der Graph von (V,F) keinen Kreis enthält
 - ein Spannbaum von G , wenn (V,F) zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält
 - ein zusammenhängender Teilgraph von G , wenn (V,F) zusammenhängend ist

zusammenhängender Teilgraph

- ▶ p fest, $q \downarrow 0$
- ▶ G ist zusammenhängend, die minimale Clusteranzahl ist $k(\omega) = 1$
- ▶ $\phi_{p,q}(\omega) \propto p^{|\eta(\omega)|} (1-p)^{|E \setminus \eta(\omega)|} q^1$
- ▶ bei allen realtiven Wahrscheinlichkeiten haben wir q^1 , beim dividieren kürzt es sich raus
- ▶ übrig bleibt ϕ_p was genau der Bernoulli Perkulation mit Wahrscheinlichkeit p entspricht.
- ▶ Spezialfall: $p = \frac{1}{2}$, dann haben alle zusammenhängenden Teilgraphen dasselbe Gewicht
- ▶ UCS- uniform connected subgraph measure

Spannbaum

- ▶ $q \downarrow 0$, $p \downarrow 0$, aber q geht schneller gegen 0 als p
- ▶ $Z_{RC} = (1 - p)^{|E|} \sum_{\omega} \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^{|\eta(\omega)|+k(\omega)} \left(\frac{q(1-p)}{p}\right)^{k(\omega)}$
- ▶ $\phi_{p,q} \Rightarrow UST$

Wälder

- ▶ $p = \alpha q$ und q gehen gleich schnell gegen 0
- ▶ $\phi_{p,q} \propto \alpha q^{|\eta(\omega)|} (1 - \alpha q)^{|E \setminus \eta(\omega)|} q^{k(\omega)}$
- ▶ $\phi_{p,q} \propto \alpha^{|\eta(\omega)|} (1 - \alpha q)^{|E \setminus \eta(\omega)|} q^{k(\omega) + |\eta(\omega)|}$
- ▶ Spezialfall: $\alpha = 1$, dann haben alle Wälder das gleiche Gewicht, d.h: $\phi_{p,q} \Rightarrow USF$

Theorem 1.23

- Im Grenzfall $q \downarrow 0$ gilt:

$$\phi_{p,q} \Rightarrow \begin{cases} UCS, & \text{wenn } p = \frac{1}{2}, \\ UST, & \text{wenn } p \rightarrow 0 \text{ und } q/p \rightarrow 0, \\ USF, & \text{wenn } p=q. \end{cases}$$