

Stochastische Ordnung von Maßen: Holley's- und FKG-Ungleichung

Ben Ruhnke

17. Juni 2026

Definition 2.1

- Im Folgenden Sei $\Omega = \{0, 1\}^E$ für E endlich und $\mathcal{F}$ die von den Zylindermengen erzeugte σ -Algebra zu Ω .
- Ω hat eine natürliche Halbordnung $\leq$ definiert durch

$$\omega_1 \leq \omega_2 \iff \forall e \in E : \omega_1(e) \leq \omega_2(e)$$

- Sei N eine Reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann heißt N (monoton) wachsend falls für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gilt:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Rightarrow N(\omega_1) \leq N(\omega_2)$$

N heißt (monoton) fallend falls $-N$ wachsend ist.

- Ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ heißt wachsend falls die Zufallsvariable $\mathbb{1}_A$ wachsend ist.

Definition 2.2

Seien μ_1, μ_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. μ_1 heißt stochastisch kleiner als μ_2 (geschr. $\mu_1 \leq_{\text{st}} \mu_2$), falls für alle $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wachsenden und beschränkten Zufallsvariablen gilt:

$$\mathbb{E}_{\mu_1}[X] \leq \mathbb{E}_{\mu_2}[X]$$

Lemma 2.3 (Strassen)

Falls ein Maß κ auf $\Omega \times \Omega$ existiert welches folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\kappa(A \times \Omega) = \mu_1(A), \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (1)$$

$$\kappa(\Omega \times A) = \mu_2(A), \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (2)$$

$$\kappa(\{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \leq \omega_2\}) = 1 \quad (3)$$

Dann gilt $\mu_1 \leq_{\text{st}} \mu_2$.

Sei X eine wachsende und beschränkte Zufallsvariable auf Ω . Da κ marginale Verteilungen μ_1 und μ_2 hat gilt

$$\mathbb{E}_{\mu_1}[X] = \int_{\Omega^2} X(\omega_1) d\kappa(\omega_1, \omega_2)$$

und

$$\mathbb{E}_{\mu_2}[X] = \int_{\Omega^2} X(\omega_2) d\kappa(\omega_1, \omega_2).$$

Für $\omega_1 \leq \omega_2$ gilt, da X wachsend ist

$$X(\omega_1) \leq X(\omega_2) \quad \kappa - \text{f.s.}$$

Integration bezüglich κ liefert

$$\int_{\Omega^2} X(\omega_1) d\kappa \leq \int_{\Omega^2} X(\omega_2) d\kappa$$



Definition 2.4

Ein W-maß μ heißt strikt positiv falls

$$\forall \omega \in \Omega : \mu(\omega) > 0$$

gilt.

Definition 2.5

Wir definieren für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ die Ausdrücke $\omega_1 \wedge \omega_2$ und $\omega_1 \vee \omega_2$ durch:

$$\omega_1 \wedge \omega_2(e) := \min\{\omega_1(e), \omega_2(e)\}$$

$$\omega_1 \vee \omega_2(e) := \max\{\omega_1(e), \omega_2(e)\}$$

Satz 2.6 (Holley)

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ endlich, μ_1, μ_2 strikt positive W-Maße . Falls für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$\mu_2(\omega_1 \vee \omega_2) \mu_1(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu_1(\omega_1) \mu_2(\omega_2) \quad (4)$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\mu_1 \leq_{st} \mu_2.$$

Lemma 2.7

(4) ist erfüllt genau dann, wenn

$$\mu_2(\omega(e) = 1 \mid \omega(f) = \zeta(f), f \neq e) \geq \mu_1(\omega(e) = 1 \mid \omega(f) = \xi(f), f \neq e)$$

für alle $\xi \leq \zeta$ und $e \in E$ gilt.

Seien μ_1, μ_2 strikt positive W-Maße, die (4) erfüllen. Sei $\xi \leq \zeta$ und $e \in E$. Einsetzen von ξ^e, ζ_e in (4) liefert:

$$\begin{aligned} \mu_2(\xi^e \vee \zeta_e) \mu_1(\xi^e \wedge \zeta_e) &\geq \mu_1(\xi^e) \mu_2(\zeta_e) \\ \iff \mu_2(\zeta^e) \mu_1(\xi_e) &\geq \mu_1(\xi^e) \mu_2(\zeta_e) \\ \iff \frac{\mu_2(\zeta^e)}{\mu_2(\zeta_e)} &\geq \frac{\mu_1(\xi^e)}{\mu_1(\xi_e)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \iff \frac{\mu_2(\zeta^e)}{\mu_2(\zeta^e) + \mu_2(\zeta_e)} &\geq \frac{\mu_1(\xi^e)}{\mu_1(\xi^e) + \mu_1(\xi_e)} \\ \iff \mu_2(\omega(e) = 1 \mid \omega(f) = \zeta(f), f \neq e) &\geq \mu_1(\omega(e) = 1 \mid \omega(f) = \xi(f), f \neq e) \end{aligned} \quad (6)$$

Rückrichtung ohne Beweis. □

- Seien μ_1, μ_2 strikt positive W-Maße, die (4) erfüllen.
- Sei $e_k \sim \mathcal{U}(E)$ und $(X_k)_{k=0}^\infty$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum Ω definiert durch

$$\begin{aligned} X_k(e) &= X_{k-1}(e) \text{ für alle } e \in E \setminus \{e_k\}, \\ X_k(e_k) &\sim \mu_1(\omega(e_k) \mid \omega(f) = X_{k-1}(f), f \neq e_k), \end{aligned}$$

wobei $X_0 \sim \mu_1$.

- Man kann nachrechnen, dass $X_{k-1} \sim \mu_1 \implies X_k \sim \mu_1$.
 (X_k) hat also stationäre Verteilung μ_1
- Da μ_1 strikt positiv ist ist (X_k) irreduzibel.
- Analog definiere $(X'_k)_{k=0}^\infty$ zu μ_2 , mit entsprechenden Eigenschaften.

- Nun definiere eine neue Markov-Kette $(Y_k)_{k=0}^\infty = (X_k, X'_k)_{k=0}^\infty$ auf $\Omega \times \Omega$ mit $e_k \sim \mathcal{U}(E)$, $U_k \sim \mathcal{U}([0, 1])$ durch

$$\begin{aligned} X_k(e) &= X_{k-1}(e) \text{ für alle } e \in E \setminus \{e_k\}, \\ X_k(e_k) &= \mathbb{1} \{U_k \leq \mu_1(\omega(e_k) = 1 \mid \omega(f) = X_{k-1}(f), f \neq e_k)\} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} X'_k(e) &= X'_{k-1}(e) \text{ für alle } e \in E \setminus \{e_k\}, \\ X'_k(e_k) &= \mathbb{1} \{U_k \leq \mu_2(\omega(e_k) = 1 \mid \omega(f) = X'_{k-1}(f), f \neq e_k)\}, \end{aligned}$$

- Nach Konstruktion hat Y Marginale X_k, X'_k

- wegen (6) gilt $X_k \leq X'_k$ falls $X_{k-1} \leq X'_{k-1}$
- Da X'_k irreduzibel ist, gilt fast sicher $\exists K < \infty : X'_K = \mathbf{1}$, also ist $\forall k \geq K : X_k \leq X'_k$.
- Da Y_k aperiodisch ist, konvergiert Y_k gegen eine stationäre Verteilung κ .
- κ erfüllt die Eigenschaften aus Lemma 2.3 (Strassen). d.h. κ hat marginale μ_1, μ_2 und

$$\kappa(\{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \leq \omega_2\}) = 1$$



Definition 2.8 (FKG Gittereigenschaft)

Sei μ W-Maß auf $\Omega = \{0, 1\}^E$. Wir sagen μ erfüllt die FKG Gittereigenschaft falls für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$\mu(\omega_1 \vee \omega_2) \mu(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu(\omega_1) \mu(\omega_2)$$

gilt.

Satz 2.9 (FKG Ungleichung)

Sei μ ein strikt positives W-Maß, welches die FKG Gittereigenschaft erfüllt, dann gilt für beliebige wachsende Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_\mu [XY] \geq \mathbb{E}_\mu [X] \mathbb{E}_\mu [Y]. \quad (7)$$

Falls ein Maß μ Gleichung (7) für alle X, Y wachsend erfüllt, so heißt es positiv assoziiert.

- Seien X, Y wachsende Zufallsvariablen und μ ein strikt positives W-Maß, welches die FKG Gittereigenschaft erfüllt.
- OBdA Sei $Y(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Definiere strikt positive W-Maße $\mu_1 = \mu$ und

$$\mu_2(\omega) = \frac{Y(\omega)\mu(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} Y(\omega')\mu(\omega')} = cY(\omega)\mu(\omega).$$

- Dann gilt für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ beliebig

$$\begin{aligned}\mu_2(\omega_1 \vee \omega_2) \mu_1(\omega_1 \wedge \omega_2) &= cY(\omega_1 \vee \omega_2)\mu(\omega_1 \vee \omega_2)\mu(\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &\geq cY(\omega_2)\mu(\omega_1)\mu(\omega_2) = \mu_1(\omega_1)\mu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

- Also folgt aus Ungleichung 2.6 (Holley) $\mu_1 \leq_{\text{st}} \mu_2$.
- insbesondere gilt

$$\frac{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\omega)\mu(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} Y(\omega')\mu(\omega')} = \mathbb{E}_{\mu_2}[X] \geq \mathbb{E}_{\mu_1}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mu(\omega).$$

Satz 2.10

Ein strikt positives W -Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ erfüllt die FKG Gittereigenschaft genau dann wenn für alle unvergleichbaren $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $H(\omega_1, \omega_2) = 2$ gilt

$$\mu(\omega_1 \vee \omega_2)\mu(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu(\omega_1)\mu(\omega_2).$$

Dabei bezeichnet $H(\omega_1, \omega_2)$ die Hamming Distanz zwischen ω_1 und ω_2 .

Beweis „ $\Rightarrow$ “.

Trivial, da falls FKG Gittereigenschaft für alle Paare ω_1, ω_2 erfüllt ist, dann auch für solche mit Hamming Distanz 2.

- Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ nicht vergleichbar und mit Hamming Abstand 2.
- Da $H(\omega_1, \omega_2) = 2$ gibt es zwei kanten $e, f \in E$ mit OBdA $\omega_1(e) = 1, \omega_1(f) = 0$ und $\omega_2(e) = 0, \omega_2(f) = 1$.
- Sei nun $\xi = \omega_1 \wedge \omega_2$, dann gilt $\omega_1 = \xi^e, \omega_2 = \xi^f$.
- Einsetzen in die Voraussetzung liefert

$$\mu(\xi^{ef})\mu(\xi) \geq \mu(\xi^e)\mu(\xi^f) \quad (8)$$

$$\iff \frac{\mu(\xi^{ef})}{\mu(\xi^e)} \geq \frac{\mu(\xi^f)}{\mu(\xi)}. \quad (9)$$

- Für $\alpha \geq \beta \in \Omega$ mit $\alpha(f) = \beta(f) = 0$ folgt nun durch wiederholtes anwenden von (9)

$$\frac{\mu(\alpha^f)}{\mu(\alpha)} \geq \frac{\mu(\beta^f)}{\mu(\beta)}.$$

- Seien nun $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ beliebig. Falls $\omega_1 \leq \omega_2$ So gilt die FKG Gittereigenschaft trivialerweise mit Gleichheit.
- Also seien ω_1 und ω_2 unvergleichbar. Sei

$$B = \eta(\omega_2) \setminus \eta(\omega_1) = \{f \in E \mid \omega_1(f) = 0, \omega_2(f) = 1\} = \{f_1, \dots, f_n\}.$$

- Sei nun $\eta_0 = \omega_1$ und $\eta_i = \eta_{i-1}^{f_i}$ d.h. $\eta_n = \omega_1 \vee \omega_2$.
- Entsprechend $\zeta_0 = \omega_1 \wedge \omega_2$ und $\zeta_i = \zeta_{i-1}^{f_i}$ d.h. $\zeta_n = \omega_2$.
- Für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, da $\eta_i \geq \zeta_i$:

$$\frac{\mu(\eta_i)}{\mu(\eta_{i-1})} \geq \frac{\mu(\zeta_i)}{\mu(\zeta_{i-1})}.$$

- Multiplizieren über i liefert:

$$\prod_{i=1}^n \frac{\mu(\eta_i)}{\mu(\eta_{i-1})} \geq \prod_{i=1}^n \frac{\mu(\zeta_i)}{\mu(\zeta_{i-1})}.$$

- Auflösen des Teleskopproduktes:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\eta_n)}{\mu(\eta_0)} &\geq \frac{\mu(\zeta_n)}{\mu(\zeta_0)} \\ \Leftrightarrow \frac{\mu(\omega_1 \vee \omega_2)}{\mu(\omega_1)} &\geq \frac{\mu(\omega_2)}{\mu(\omega_1 \wedge \omega_2)} \end{aligned}$$



Definition 2.11

Sei μ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, $F \subseteq E$ und $\xi \in \Omega$. Setze $\Omega_F := \{0, 1\}^F$ und

$$\Omega_F^\xi = \{\omega \in \Omega \mid \omega(e) = \xi(e) \quad \forall e \in E \setminus F\}.$$

Falls $\mu(\Omega_F^\xi) > 0$ definiere das bedingte Maß μ_F^ξ auf Ω_F durch

$$\mu_F^\xi(\omega_F) = \mu(\omega_F \mid \Omega_F^\xi) = \frac{\mu(\omega_F \times \xi)}{\mu(\Omega_F^\xi)}.$$

Dabei ist $\omega_F \times \xi$ definiert als $\omega_F(e)$ falls $e \in F$ und als $\xi(e)$ sonst.

Definition 2.12

Sei μ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

(i) μ heißt **stark positiv assoziiert** falls

$$\forall F \subseteq E, \forall \xi \in \Omega : \mu(\Omega_F^\xi) > 0 \implies \mu_F^\xi \text{ ist positiv assoziiert}$$

(ii) μ heißt **monoton** falls für alle $F \subseteq E$, $\xi \leq \zeta$ gilt:

$$\mu_F^\xi \leq_{\text{st}} \mu_F^\zeta.$$

(iii) μ heißt **1-monoton** falls für alle $\xi \leq \zeta$ und $F \subseteq E$ mit $|F| = 1$ gilt

$$\mu_F^\xi \leq_{\text{st}} \mu_F^\zeta.$$

Satz 2.13

Sei μ ein strikt positives W -Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (a) μ ist stark positiv assoziiert.*
- (b) μ erfüllt die FKG Gittereigenschaft.*
- (c) μ ist monoton.*
- (d) μ ist 1-monoton*

- Wegen Satz 2.10 genügt es die FKG Gittereigenschaft für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ unvergleichbar und mit $H(\omega_1, \omega_2) = 2$ zu zeigen.
- Seien dies OBdA $e_1, e_2 \in E = \{e_1, \dots, e_m\}$.
- Wir schreiben eine Konfiguration ω als das „Wort“ $\omega(e_1)\omega(e_2)\dots\omega(e_m)$.
- OBdA sei nun $\omega_1 = 01w$ und $\omega_2 = 10w$. Außerdem sei $\alpha(xy) = \mu(xyw)$
- Betrachte nun die wachsenden Ereignisse $A = \{e_1 = 1\}, B = \{e_2 = 1\}$ und setze $F = \{e_1, e_2\}$ da μ stark positiv assoziiert ist gilt:

$$\mu_F^w(A \cap B) \geq \mu_F^w(A)\mu_F^w(B).$$

- Sei $\Sigma = \alpha(00) + \alpha(10) + \alpha(01) + \alpha(11) = \mu(\Omega_F^w)$.
- Es gilt

$$\mu_F^w(A \cap B) = \frac{\alpha(11)}{\Sigma}$$

und

$$\mu_F^w(A) = \frac{\alpha(10) + \alpha(11)}{\Sigma}, \quad \mu_F^w(B) = \frac{\alpha(01) + \alpha(11)}{\Sigma}.$$

- Umstellen der Ungleichung $\mu_F^w(A \cap B) \geq \mu_F^w(A)\mu_F^w(B)$ liefert

$$\alpha(11)\alpha(00) \geq \alpha(10)\alpha(01)$$

- Dies entspricht, da $\alpha(11) = \mu(11w) = \mu(\omega_1 \vee \omega_2)$ und $\alpha(00) = \mu(00w) = \mu(\omega_1 \wedge \omega_2)$ ist, der FKG Gittereigenschaft.

(b) $\Rightarrow$ (a)

- Sei $F \subseteq E$, $\xi \in \Omega$ und $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_F$ beliebig.
- Dann gilt da μ die FKG Gittereigenschaft erfüllt

$$\begin{aligned} \mu_F^\xi(\omega_1 \vee \omega_2) \mu_F^\xi(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \frac{\mu((\omega_1 \vee \omega_2) \times \xi) \mu((\omega_1 \wedge \omega_2) \times \xi)}{\mu(\Omega_F^\xi)^2} \\ &\geq \frac{\mu(\omega_1 \times \xi) \mu(\omega_2 \times \xi)}{\mu(\Omega_F^\xi)^2}. \end{aligned}$$

- Also ist μ_F^ξ positiv assoziiert.

(b) $\Rightarrow$ (c)

- Sei $F \subseteq E$ und $\xi \leq \zeta \in \Omega$
- Für $\omega_F, \rho_F \in \Omega_F$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_F^\zeta(\omega_F \vee \rho_F) \mu_F^\xi(\omega_F \wedge \rho_F) &= \frac{\mu((\omega_F \vee \rho_F) \times \zeta) \mu((\omega_F \wedge \rho_F) \times \xi)}{\mu(\Omega_F^\xi) \mu(\Omega_F^\zeta)} \\ &\geq \frac{\mu(\omega_F \times \zeta) \mu(\rho_F \times \xi)}{\mu(\Omega_F^\xi) \mu(\Omega_F^\zeta)} = \mu_F^\zeta(\omega_F) \mu_F^\xi(\rho_F), \end{aligned}$$

da $(\omega_F \times \zeta) \vee (\rho_F \times \xi) = (\omega_F \vee \rho_F) \times \zeta$ und
 $(\omega_F \times \zeta) \wedge (\rho_F \times \xi) = (\omega_F \wedge \rho_F) \times \xi$, weil $\xi \leq \zeta$ ist.

- Mit der Holley Ungleichung folgt nun die Behauptung.

(c) $\Rightarrow$ (d) ist Trivial.

(d) $\Rightarrow$ (b) folgt aus Lemma 2.7

- Halbordnung auf Ω , Wachsende Zufallsvariablen, stochastische Ordnung, Holley Ungleichung.
- FKG Ungleichung positive Korrelation wachsender Ereignisse.
- Abschwächung von FKG auf unvergleichbare Zustände mit Hamming-Distanz 2.
- Äquivalente Bedingungen für FKG Ungleichung (stark positiv assoziiert, Monotonie, 1-Monoton).