

Seminarvortrag über die Ergodentheorie

Alexander Frochte

Ruhr-Universität-Bochum

13.05.2026

Begriffsbildung

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein W-Raum und $\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine messbare Abbildung.

Definition

Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt **invariant**, falls $\tau^{-1}(A) = A$ und die **σ -Algebra der invarianten Ereignisse** bezeichnen wir mit

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : \tau^{-1}(A) = A\}.$$

Begriffsbildung

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein W-Raum und $\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine messbare Abbildung.

Definition

Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt **invariant**, falls $\tau^{-1}(A) = A$ und die **σ -Algebra der invarianten Ereignisse** bezeichnen wir mit

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : \tau^{-1}(A) = A\}.$$

Definition

(i) τ heißt **maßtreu**, falls

$$\mathbf{P}[\tau^{-1}(A)] = \mathbf{P}[A] \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{A}$$

und wir nennen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \tau)$ maßerhaltendes dynamisches System.

Begriffsbildung

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein W-Raum und $\tau : \Omega \longrightarrow \Omega$ eine messbare Abbildung.

Definition

Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt **invariant**, falls $\tau^{-1}(A) = A$ und die **σ -Algebra der invarianten Ereignisse** bezeichnen wir mit

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} : \tau^{-1}(A) = A\}.$$

Definition

(i) τ heißt **maßtreu**, falls

$$\mathbf{P} [\tau^{-1}(A)] = \mathbf{P} [A] \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{A}$$

und wir nennen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \tau)$ maßerhaltendes dynamisches System.

(ii) Ist τ maßtreu und $\mathcal{I}$ $\mathbf{P}$ -trivial, so heißt ergdodisch $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \tau)$.

Ergodensatz: Vorbereitung

Lemma (20.07)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ ein maßerhaltendes dynamisches System und $\mathcal{I}$ die invariante σ -Algebra.

Dann gilt:

- (i) f ist $\mathcal{I}$ -messbar genau dann, wenn $f \circ T = f$ $\mathbb{P}$ -f.s.*
- (ii) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ ist ergodisch genau dann, wenn jede $\mathcal{I}$ -messbare Funktion f.s. konstant ist.*

Ergodensatz: Vorbereitung

Beweisidee

Für Indikatorfunktionen ist die erste Aussage direkt klar:

$$1_A \circ T = 1_A \iff T^{-1}A = A,$$

also genau dann, wenn A invariant ist. Der allgemeine Fall folgt durch Approximation.

Für die zweite Aussage gilt: Ergodizität bedeutet, dass jedes invariante Ereignis nur Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 hat. Daher kann eine $\mathcal{I}$ -messbare Funktion keine nichttriviale invariante Information tragen und ist folglich fast sicher konstant. Umgekehrt liefern Indikatorfunktionen invarianten Mengen sofort die Rückrichtung.

Ergodensatz: Vorbereitung

In diesem Abschnitt sei stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \tau)$ ein maßerhaltendes dynamisches System, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar und

$$X_n = f \circ \tau^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist also $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stationärer Prozess und wir bezeichnen mit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

die n -te Partialsumme.

Ergodensatz: Vorbereitung

Bemerkung

Jeder stationäre Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ lässt sich mithilfe des **Shifts**

$$\tau : \Omega \longrightarrow \Omega, \quad (w_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto (w_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$$

auf diese Weise darstellen.

Ergodensatz: Vorbereitung

Lemma (Hopf'sches Maximal-Ergodenlemma)

Sei $X_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Setze $M_n = \max\{0, S_1, \dots, S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X_0 \mathbf{1}_{M_n > 0}] \geq 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$X_0 + M_n \circ \tau \geq X_0 + S_k \circ \tau$$

Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$X_0 + M_n \circ \tau \geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$X_0 + M_n \circ \tau \geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1}$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen $S_1 = X_0$ und $M_n \geq 0$ gilt das auch für $k = 0$ und damit

$$X_0 \geq \max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau.$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen $S_1 = X_0$ und $M_n \geq 0$ gilt das auch für $k = 0$ und damit

$$X_0 \geq \max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau.$$

Aus der Maßtreue von τ und $M_n \geq 0$ folgt dann

$$\mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_{M_n > 0}] \geq \mathbb{E}[(\max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}]$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen $S_1 = X_0$ und $M_n \geq 0$ gilt das auch für $k = 0$ und damit

$$X_0 \geq \max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau.$$

Aus der Maßtreue von τ und $M_n \geq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_{M_n > 0}] &\geq \mathbb{E}[(\max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \end{aligned}$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen $S_1 = X_0$ und $M_n \geq 0$ gilt das auch für $k = 0$ und damit

$$X_0 \geq \max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau.$$

Aus der Maßtreue von τ und $M_n \geq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_{M_n > 0}] &\geq \mathbb{E}[(\max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \\ &\geq \mathbb{E}[(M_n - M_n \circ \tau)] \end{aligned}$$



Beweis.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $M_n \circ \tau \geq S_k \circ \tau$ und daher

$$\begin{aligned} X_0 + M_n \circ \tau &\geq X_0 + S_k \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_l \circ \tau = X_0 + \sum_{l=0}^{k-1} X_{l+1} \\ &= S_{k+1}. \end{aligned}$$

Wegen $S_1 = X_0$ und $M_n \geq 0$ gilt das auch für $k = 0$ und damit

$$X_0 \geq \max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau.$$

Aus der Maßtreue von τ und $M_n \geq 0$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_0 \mathbb{1}_{M_n > 0}] &\geq \mathbb{E}[(\max\{S_1, \dots, S_n\} - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \\ &= \mathbb{E}[(M_n - M_n \circ \tau) \mathbb{1}_{M_n > 0}] \\ &\geq \mathbb{E}[(M_n - M_n \circ \tau)] = \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_n] = 0 \end{aligned}$$



Satz (Individueller Ergodensatz)

Sei $f = X_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \tau^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_0 | \mathcal{I}] \quad \mathbf{P}\text{-f.s.}$$

Ist speziell τ ergodisch so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_0] \quad \mathbf{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Reduktion

Im ergodischen Fall folgt der Zusatz sofort aus der allgemeinen Aussage, denn

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = \mathbb{E}[X_0] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Reduktion

Im ergodischen Fall folgt der Zusatz sofort aus der allgemeinen Aussage, denn

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = \mathbb{E}[X_0] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Nach Lemma 20.07 (ii) gilt

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] \circ \tau = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Reduktion

Im ergodischen Fall folgt der Zusatz sofort aus der allgemeinen Aussage, denn

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = \mathbb{E}[X_0] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Nach Lemma 20.07 (ii) gilt

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] \circ \tau = \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Daher können wir

$$X_n - \mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}]$$

anstelle von X_n betrachten und ohne Einschränkung annehmen:

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = 0.$$

Beweis: Das Ziel im zentrierten Fall

Unter der Annahme

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = 0$$

müssen wir zeigen:

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Das Ziel im zentrierten Fall

Unter der Annahme

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = 0$$

müssen wir zeigen:

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Setze

$$Z := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}.$$

Beweis: Das Ziel im zentrierten Fall

Unter der Annahme

$$\mathbb{E}[X_0 \mid \mathcal{I}] = 0$$

müssen wir zeigen:

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Setze

$$Z := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}.$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$F := \{Z > \varepsilon\}.$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}(F) = 0.$$

Beweis: Warum genügt $\mathbb{P}(F) = 0$?

Gilt für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) = 0,$$

so folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Warum genügt $\mathbb{P}(F) = 0$?

Gilt für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) = 0,$$

so folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wendet man dasselbe Argument auf $-X_0$ an, so erhält man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Warum genügt $\mathbb{P}(F) = 0$?

Gilt für jedes $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) = 0,$$

so folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Wendet man dasselbe Argument auf $-X_0$ an, so erhält man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Also insgesamt

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Invarianz des kritischen Ereignisses

Die Größe

$$Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

ändert sich durch Verschiebung entlang der Dynamik nicht.

Beweis: Invarianz des kritischen Ereignisses

Die Größe

$$Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

ändert sich durch Verschiebung entlang der Dynamik nicht.
Daher ist Z invariant.

Beweis: Invarianz des kritischen Ereignisses

Die Größe

$$Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$$

ändert sich durch Verschiebung entlang der Dynamik nicht.

Daher ist Z invariant.

Somit gehört

$$F = \{Z > \varepsilon\}$$

zur invarianten σ -Algebra:

$$F \in \mathcal{I}.$$

Beweis: Modifizierte Folge

Setze

$$X'_n := X_n - \varepsilon \mathbf{1}_F,$$

$$M'_n := \max(0, S'_1, \dots, S'_n),$$

$$S'_n := \sum_{k=0}^{n-1} X'_k.$$

$$F_n := \{M'_n > 0\}.$$

Beweis: Modifizierte Folge

Setze

$$\begin{aligned}X'_n &:= X_n - \varepsilon \mathbf{1}_F, & S'_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} X'_k. \\M'_n &:= \max(0, S'_1, \dots, S'_n), & F_n &:= \{M'_n > 0\}.\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$$

und

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n = \left\{ \sup_{k \geq 1} S'_k > 0 \right\}.$$

Beweis: Modifizierte Folge

Setze

$$\begin{aligned}X'_n &:= X_n - \varepsilon \mathbf{1}_F, & S'_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} X'_k. \\M'_n &:= \max(0, S'_1, \dots, S'_n), & F_n &:= \{M'_n > 0\}.\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$$

und

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n = \left\{ \sup_{k \geq 1} S'_k > 0 \right\}.$$

Auf $F = \{Z > \varepsilon\}$ gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} > \varepsilon$, also existiert ein k mit $S_k - k\varepsilon > 0$, also

$$F = \bigcup_{n \geq 1} F_n.$$

Beweis: Anwendung des Maximal-Ergodenlemmas

Da $X_0 \in L^1(\mathbb{P})$ und $\mathbf{1}_F$ beschränkt ist, gilt auch

$$X'_0 := X_0 - \varepsilon \mathbf{1}_F \in L^1(\mathbb{P}).$$

Beweis: Anwendung des Maximal-Ergodenlemmas

Da $X_0 \in L^1(\mathbb{P})$ und $\mathbf{1}_F$ beschränkt ist, gilt auch

$$X'_0 := X_0 - \varepsilon \mathbf{1}_F \in L^1(\mathbb{P}).$$

Auf die Folge (X'_n) wenden wir das Hopfsche Maximal-Ergodenlemma an.

Beweis: Anwendung des Maximal-Ergodenlemmas

Da $X_0 \in L^1(\mathbb{P})$ und $\mathbf{1}_F$ beschränkt ist, gilt auch

$$X'_0 := X_0 - \varepsilon \mathbf{1}_F \in L^1(\mathbb{P}).$$

Auf die Folge (X'_n) wenden wir das Hopfsche Maximal-Ergodenlemma an.
Damit erhalten wir für jedes n :

$$\mathbb{E}[X'_0 \mathbf{1}_{F_n}] \geq 0.$$

Beweis: Anwendung des Maximal-Ergodenlemmas

Da $X_0 \in L^1(\mathbb{P})$ und $\mathbf{1}_F$ beschränkt ist, gilt auch

$$X'_0 := X_0 - \varepsilon \mathbf{1}_F \in L^1(\mathbb{P}).$$

Auf die Folge (X'_n) wenden wir das Hopfsche Maximal-Ergodenlemma an. Damit erhalten wir für jedes n :

$$\mathbb{E}[X'_0 \mathbf{1}_{F_n}] \geq 0.$$

Wegen $F_n \uparrow F$ folgt mit majorisierter Konvergenz

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X'_0 \mathbf{1}_{F_n}] = \mathbb{E}[X'_0 \mathbf{1}_F],$$

also

$$0 \leq \mathbb{E}[X'_0 \mathbf{1}_F] = \mathbb{E}[(X_0 - \varepsilon) \mathbf{1}_F] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_0 | \mathcal{I}] \mathbf{1}_F] - \varepsilon \mathbb{P}[F] = -\varepsilon \mathbb{P}[F]$$

und damit $\mathbb{P}[F] = 0$

Beispiel 20.26: 0-1-Gesetz der Ergodentheorie

Satz

Sei $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \mathbb{Z}$ und $(X_n)_{n \in I}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten im Messraum $(E, \mathcal{E})$. Auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I}, \mathbb{P})$ bezeichne

$$\tau((x_n)_{n \in I}) := (x_{n+1})_{n \in I}$$

den Shift. Dann ist das dynamische System $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I}, \mathbb{P}, \tau)$ mischend, das heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathcal{E}^{\otimes I}.$$

Beweis: Approximation durch Zylindermengen

Seien $A, B \in \mathcal{E}^{\otimes I}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Produkt- σ -Algebra von den Zylindermengen erzeugt wird, gibt es Ereignisse A' und B' , die nur von endlich vielen Koordinaten abhängen, so dass

$$\mathbb{P}(A \Delta A') < \varepsilon, \quad \mathbb{P}(B \Delta B') < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen der Maßtreue des Shifts auch

$$\mathbb{P}(\tau^{-n}B \Delta \tau^{-n}B') = \mathbb{P}(B \Delta B') < \varepsilon.$$

Da A' und B' nur von endlich vielen Koordinaten abhängen, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Ereignisse A' und $\tau^{-n}B'$ von disjunkten Koordinatenmengen abhängen. Wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten sind dann A' und $\tau^{-n}B'$ unabhängig, also

$$\mathbb{P}(A' \cap \tau^{-n}B') = \mathbb{P}(A') \mathbb{P}(B') \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Beweis: Abschätzung

Für $n \geq N$ folgt nun

$$|\mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) - \mathbb{P}(A' \cap \tau^{-n}B')| \leq \mathbb{P}(A \triangle A') + \mathbb{P}(\tau^{-n}B \triangle \tau^{-n}B') < 2\varepsilon.$$

Ferner gilt

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A')| \leq \mathbb{P}(A \triangle A') < \varepsilon, \quad |\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B')| \leq \mathbb{P}(B \triangle B') < \varepsilon.$$

Daher erhalten wir für $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| &\leq |\mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) - \mathbb{P}(A' \cap \tau^{-n}B')| \\ &\quad + |\mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B') - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|. \end{aligned}$$

Beweis: Grenzübergang

Mit der vorigen Unabhängigkeit und der elementaren Abschätzung

$$|\mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B') - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq |\mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(A)| + |\mathbb{P}(B') - \mathbb{P}(B)|$$

folgt für alle $n \geq N$

$$|\mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| < 4\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Also ist der Shift mischend.

Folgerung: 0-1-Gesetz für invariante Ereignisse

Ist speziell A invariant, also $\tau^{-1}A = A$, so gilt auch

$$\tau^{-n}A = A \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Mischungseigenschaft folgt dann

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \tau^{-n}A) \longrightarrow \mathbb{P}(A)^2.$$

Also

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2,$$

und damit

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Somit ist der Shift insbesondere ergodisch.