

Seminar über Wechselwirkende Systeme in der Stochastik

Perkolation

Aileen Knapp

03.06.2026

- 1 Grundlagen
- 2 Existenz unendlicher Cluster
- 3 Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Grundlagen

- Wir betrachten das d -dimensionale **Gitter** $\mathbb{Z}^d$
- Jeder Punkt ist mit seinen $2d$ nächsten **Nachbarn** verbunden

Kantenmenge

Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sind durch eine **Kante**

$$k = \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

verbunden, wenn gilt

$$\|x - y\|_2 = 1.$$

Die **Kantenmenge** ist

$$K = \{ \{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d, \|x - y\|_2 = 1 \}.$$

Kantenmenge

Zwei Punkte $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sind durch eine **Kante**

$$k = \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

verbunden, wenn gilt

$$\|x - y\|_2 = 1.$$

Die **Kantenmenge** ist

$$K = \{ \{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d, \|x - y\|_2 = 1 \}.$$

Graph

Ein ungerichteter **Graph** ist ein Paar $G = (V, K)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge K .

Modell eines porösen Mediums

- Das Gitter $\mathbb{Z}^d$ modelliert ein Netzwerk von Röhren.
- Entlang der Kanten kann Wasser fließen.
- Jede Kante bleibt mit Wahrscheinlichkeit p erhalten und wird mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ zerstört.

Zentrale Frage

Für welche Werte von p

- existiert ein unendlich großes verbundenes System?
- bestehen nur endliche verbundene Komponenten?

Zufällige offene Kanten

Wähle $p \in [0, 1]$ und eine u.i.v. Familie von Zufallsvariablen

$$(X_k^p)_{k \in K}, \quad X_k^p \sim \text{Ber}(p),$$

mit

$$\mathbb{P}(X_k^p = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k^p = 0) = 1 - p \quad \forall k \in K.$$

Die Menge der offenen Kanten ist

$$K^p := \{k \in K : X_k^p = 1\}.$$

- K^p : offene bzw. intakte Kanten
- $K \setminus K^p$: geschlossene bzw. defekte Kanten

Kantenperkolation

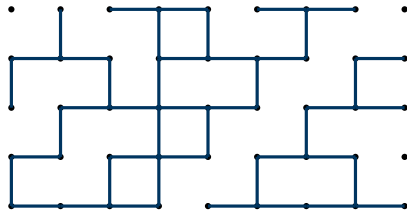
Dadurch entsteht der zufällige Teilgraph

$$(\mathbb{Z}^d, K^p),$$

den wir **Perkulationsmodell** bzw. **Kantenperkolation** nennen.

Bei der Kantenperkolation sind die **Kanten** offen oder geschlossen.

Die Punktperkolation betrachtet stattdessen offene oder geschlossene **Punkte**.



blaue Kanten sind offen

Offener Pfad

Ein **offener Pfad** der Länge n in dem Teilgraphen ist eine Folge

$$\pi = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{Z}^d$$

und

$$\langle x_{i-1}, x_i \rangle \in K^p \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Cluster von x

Wir schreiben $x \leftrightarrow_p y$, falls x und y durch einen offenen Pfad verbunden sind, und definieren

$$C^p(x) := \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow_p y\}.$$

Das ist der zufällige **offene Cluster** von x , also die Zusammenhangskomponente von x in $(\mathbb{Z}^d, K^p)$.

Messbarkeit

Für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ist

$$1_{\{x \leftrightarrow_p y\}}$$

eine Zufallsvariable. Insbesondere ist $\#C^p(x)$ eine Zufallsvariable für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$.

Defintion

Perkolation tritt ein, falls es mindestens einen unendlich großen offenen Cluster gibt.

Wir definieren

$$\psi(p) := \mathbb{P}[\text{es gibt einen unendlich großen offenen Cluster}] = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\#C^p(x) = \infty\}\right)$$

als **Perkulationswahrscheinlichkeit** und

$$\theta(p) := \mathbb{P}[\#C^p(0) = \infty]$$

als die Wahrscheinlichkeit, dass der Ursprung in einem unendlich großen offenen Cluster liegt.

Translationsinvarianz

$$\theta(p) = \mathbb{P}[\#C^p(y) = \infty] \quad \forall y \in \mathbb{Z}^d.$$

Satz

Sei I eine abzählbar unendliche Indexmenge und sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine unabhängige Familie von σ -Algebren.

Dann ist die Tail σ -Algebra $\mathbb{P}$ -trivial, d.h.

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{T}((\mathcal{A}_i)_{i \in I}).$$

Satz 2.43

Für jedes $p \in [0, 1]$ gilt

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \theta(p) = 0 \\ 1, & \text{falls } \theta(p) > 0 \end{cases}$$

Fall 1: $\theta(p) = 0$.

Mit der Translationsinvarianz gilt für jedes $y \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{P}(\#C^p(y) = \infty) = \theta(p) = 0.$$

Daher folgt mit der Subadditivität

$$\psi(p) \leq \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\#C^p(y) = \infty) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \theta(p) = 0.$$

Also gilt $\psi(p) = 0$.

Fall 2: $\theta(p) > 0$.

Sei

$$A = \bigcup_{y \in \mathbb{Z}^d} \{\#C^p(y) = \infty\}.$$

Das Ereignis A beschreibt die Existenz eines unendlich großen offenen Clusters.

- Das Verändern endlich vieler Kanten beeinflusst das Eintreten von A nicht
- Also liegt A in der Tail σ -Algebra
- Nach dem Kolmogorov'schen 0-1-Gesetz gilt

$$\psi(p) = \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$$

- Wegen $\psi(p) \geq \theta(p) > 0$ kann $\psi(p)$ nicht 0 sein

Daraus folgt

$$\psi(p) = 1$$

Satz 2.42

Die Abbildung

$$[0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad p \mapsto \theta(p)$$

ist **monoton wachsend**.

Definition

Der **kritische Wert** p_c für das Auftreten von Perkolation wird definiert als

$$\begin{aligned} p_c &= \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p) > 0\} = \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p) = 0\} \\ &= \inf\{p \in [0, 1] : \psi(p) = 1\} = \sup\{p \in [0, 1] : \psi(p) = 0\}. \end{aligned}$$

$p < p_c$: keine Perkolation

$p > p_c$: Perkolation

Existenz unendlicher Cluster

Satz 2.45

Für $d = 1$ gilt

$$p_c = 1.$$

Für $d \geq 2$ gilt

$$p_c(d) \in \left[\frac{1}{2d-1}, \frac{2}{3} \right].$$

Behauptung

Für $d = 1$ gilt $p_c = 1$.

Sei $p < 1$. Definiere

$$A^- := \{\exists n < 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\},$$

$$A^+ := \{\exists n > 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\}.$$

Behauptung

Für $d = 1$ gilt $p_c = 1$.

Sei $p < 1$. Definiere

$$A^- := \{\exists n < 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\},$$

$$A^+ := \{\exists n > 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\}.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\mathbb{P}(A^-) = \mathbb{P}(A^+) = 1.$$

Behauptung

Für $d = 1$ gilt $p_c = 1$.

Sei $p < 1$. Definiere

$$A^- := \{\exists n < 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\},$$

$$A^+ := \{\exists n > 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\}.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\mathbb{P}(A^-) = \mathbb{P}(A^+) = 0.$$

Also gibt es fast sicher links und rechts vom Ursprung mindestens eine geschlossene Kante.

$$\theta(p) = \mathbb{P}(\#C^p(0) = \infty) = 0.$$

Behauptung

Für $d = 1$ gilt $p_c = 1$.

Sei $p < 1$. Definiere

$$A^- := \{\exists n < 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\},$$

$$A^+ := \{\exists n > 0 : X_{\langle n, n+1 \rangle}^p = 0\}.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$\mathbb{P}(A^-) = \mathbb{P}(A^+) = 0.$$

Also gibt es fast sicher links und rechts vom Ursprung mindestens eine geschlossene Kante.

$$\theta(p) = \mathbb{P}(\#C^p(0) = \infty) = 0.$$

Damit gilt für alle $p < 1$: $\theta(p) = 0 \Rightarrow p_c = 1$.

Betrachten nun den Fall $d \geq 2$:

Behauptung

$$p_c \geq \frac{1}{2d-1}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\theta(p) = \mathbb{P}(\#C^p(0) = \infty) \leq \mathbb{P}(\exists x \in C^p(0) : \|x\|_\infty = n).$$

Betrachten nun den Fall $d \geq 2$:

Behauptung

$$p_c \geq \frac{1}{2d-1}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\theta(p) = \mathbb{P}(\#C^p(0) = \infty) \leq \mathbb{P}(\exists x \in C^p(0) : \|x\|_\infty = n).$$

Sei $\Pi_{0,m}$ die Menge der selbstüberschneidungsfreien Pfade der Länge m vom Ursprung.

$$\#\Pi_{0,m} \leq 2d(2d-1)^{m-1}.$$

$$\mathbb{P}(\pi \text{ offen}) = p^m.$$

Untere Schranke für p_c (Fortsetzung)

Also ist für $p < \frac{1}{2d-1}$

$$\begin{aligned}\theta(p) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{\pi \in \Pi_{0,m}} P(\pi \text{ offen}) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} 2d(2d-1)^{m-1} p^m \\ &= \frac{2d}{2d-1} \sum_{m=n}^{\infty} ((2d-1)p)^m. \\ &= \frac{2d}{(2d-1)(1-(2d-1)p)} ((2d-1)p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Daraus folgt $p_c \geq \frac{1}{2d-1}$.

Wir zeigen für $d = 2$:

$$p_c(2) \leq \frac{2}{3}.$$

Warum reicht $d = 2$?

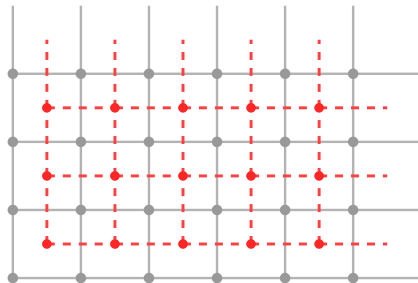
Man kann $\mathbb{Z}^d$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}^{d+1}$ auffassen. Wenn Perkolation in $\mathbb{Z}^d$ auftritt, dann auch in $\mathbb{Z}^{d+1}$.

Daher gilt

$$p_c(d+1) \leq p_c(d).$$

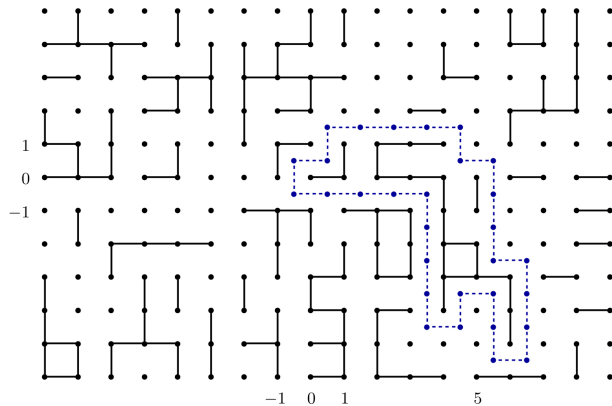
Im Fall $d = 2$ betrachtet man den dualen Graphen

$$\tilde{\mathbb{Z}}^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2.$$



Eine duale Kante kreuzt genau eine ursprüngliche Kante.

Kontur eines endlichen Clusters



$\#C_N < \infty \implies$ geschlossene Kontur im dualen Gitter

Behauptung

$$p_c \leq \frac{2}{3}.$$

Für

$$C_N := \bigcup_{i=0}^N C^p((i, 0))$$

gilt

$$\theta(p) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N P(\#C^p((i, 0)) = \infty) \geq \frac{1}{N+1} P(\#C_N = \infty).$$

Behauptung

$$p_c \leq \frac{2}{3}.$$

Für

$$C_N := \bigcup_{i=0}^N C^p((i, 0))$$

gilt

$$\theta(p) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N P(\#C^p((i, 0)) = \infty) \geq \frac{1}{N+1} P(\#C_N = \infty).$$

Falls $\#C_N < \infty$, existiert ein geschlossener Kreis im dualen Gitter, der C_N umschließt.

Falls ein Cluster endlich ist, muss er von einem geschlossenen Kreis im dualen Graphen umgeben sein.

Abschätzung

Ein geschlossener dualer Kreis der Länge n hat Wahrscheinlichkeit

$$(1 - p)^n.$$

Die Anzahl solcher Kreise kann abgeschätzt werden durch

$$n \cdot 3^n.$$

Kernaussage

Für großes p sind geschlossene Konturen sehr unwahrscheinlich.

Sei Γ_n die Menge aller geschlossenen Kreise der Länge n .

$$\#\Gamma_n \leq n 3^n.$$

Sei Γ_n die Menge aller geschlossenen Kreise der Länge n .

$$\#\Gamma_n \leq n 3^n.$$

Daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\#C_N < \infty) &\leq \sum_{n=2N}^{\infty} \mathbb{P}(\exists \gamma \in \Gamma_n \text{ geschlossen}) \\ &\leq \sum_{n=2N}^{\infty} n 3^n (1-p)^n \\ &= \sum_{n=2N}^{\infty} n (3(1-p))^n. \end{aligned}$$

Für die Menge C_N der Punkte, die mit $\{0, \dots, N\} \times \{0\}$ verbunden sind, gilt

$$\mathbb{P}(\#C_N < \infty) \leq \sum_{n=2N}^{\infty} n(3(1-p))^n.$$

Falls $3(1-p) < 1$, also $p > 2/3$, geht diese Wahrscheinlichkeit für $N \rightarrow \infty$ gegen 0.

Daraus folgt

$$p_c \leq \frac{2}{3}.$$

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Satz 2.47: Eindeutigkeit

Sei

$$N \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

die zufällige Anzahl unendlich großer offener Cluster.

Satz

Für jedes $p \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbb{P}_p(N \leq 1) = 1.$$

Bedeutung

Falls ein unendlicher Cluster existiert, dann ist er fast sicher eindeutig.

- **Fall 1** $p = 1$: Alle Kanten sind offen. Dann ist ganz $\mathbb{Z}^d$ ein unendlicher Cluster, also $N = 1$ fast sicher.
- **Fall 2** $\theta(p) = 0$: Für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\mathbb{P}_p(\#C^p(x) = \infty) = 0.$$

Da $\mathbb{Z}^d$ abzählbar ist, folgt

$$\mathbb{P}_p(\exists x \in \mathbb{Z}^d : \#C^p(x) = \infty) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(\#C^p(x) = \infty) = 0.$$

Also ist $N = 0$ fast sicher.

Jetzt wird betrachtet

$$p \in (0, 1) \quad \text{und} \quad \theta(p) > 0.$$

Beweisstrategie

- 1.: N ist fast sicher konstant
- 2: Ein endlicher Wert $m \geq 2$ ist unmöglich
- 3.: Der Wert ∞ ist unmöglich

Beispiel 20.26

Sei $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{Z}$ und $(X_n)_{n \in I}$ eine u.i.v. Folge. Sei τ der Shiftoperator. Dann gilt für jedes translationsinvariante Ereignis A :

$$\tau^{-1}(A) = A \implies \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Schritt 1: N ist fast sicher konstant

Zu zeigen

$$\mathbb{P}_p(N = m) = 1 \quad \text{für ein } m \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}.$$

Idee

Wir nutzen das 0-1-Gesetz für translationsinvariante Ereignisse. Das Ereignis $\{N = m\}$ hat genau diese Eigenschaft.

Wir betrachten die Translation

$$\tau : K \rightarrow K, \quad \tau(\langle x, y \rangle) = \langle x + e_1, y + e_1 \rangle.$$

Definition

Sei

$$K_0 := \{ \langle (x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \rangle \in K : x_1 = 0, y_1 \geq 0 \}.$$

Das ist die Menge der Kanten in $\mathbb{Z}^d$, die zwei Punkte in $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ verbinden oder von $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ nach $\{1\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ führen.

- K_0 wird verschoben mit $(\tau^n(K_0))_{n \in \mathbb{Z}}$
- Die Schichten zerlegen die Kantenmenge disjunkt:

$$K = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n(K_0)$$

- Zugehörige Zufallsvariablen:

$$Y_n := (X_{\tau^n(k)}^p)_{k \in K_0}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist u.i.v.

Schritt 1: Anwendung des 0-1-Gesetzes

Setze

$$Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \tau(Y) = (Y_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Sei $A_m \subseteq \{0, 1\}^K$ definiert durch

$$\{Y \in A_m\} = \{N = m\}.$$

- Die Anzahl N ändert sich durch Verschieben des gesamten Gitters nicht:

$$\{Y \in A_m\} = \{\tau(Y) \in A_m\}$$

- Also ist $\{N = m\}$ translationsinvariant
- Nach Beispiel 20.26 gilt

$$\mathbb{P}_p(N = m) \in \{0, 1\} \text{ für alle } m$$

- Da die Ereignisse $\{N = m\}$ eine Zerlegung des Wahrscheinlichkeitsraums bilden, muss für genau ein m

$$\mathbb{P}_p(N = m) = 1$$

gelten

Zu zeigen

$$\mathbb{P}_p(N = m) = 0 \quad \text{für jedes } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Widerspruchsbeweis: Angenommen, für ein $m \geq 2$ gilt

$$\mathbb{P}_p(N = m) = 1.$$

Für $L \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$B_L := \{-L, \dots, L\}^d, \quad K_L := \{k = \langle x, y \rangle \in K : x, y \in B_L\}.$$

Für $i = 0, 1$ definieren wir

$$D_L^i := \{X_k^p = i \mid k \in K_L\}.$$

Modifizierte Anzahl unendlicher Cluster

- N_L^1 : Anzahl unendlicher Cluster, wenn alle Kanten in K_L **geöffnet** werden
- N_L^0 : Anzahl unendlicher Cluster, wenn alle Kanten in K_L **geschlossen** werden

Wegen $\mathbb{P}_p(D_L^i) > 0$ und $N = m$ fast sicher gilt

$$N_L^i = m \text{ fast sicher für } i = 0, 1.$$

Warum?:

Wir nehmen an, dass die Anzahl unendlicher Cluster fast sicher gleich m ist. Da wir nur endlich viele Kanten in einer festen Box verändern und die entsprechende Konfiguration positive Wahrscheinlichkeit besitzt, bleibt diese Aussage auch nach dem Öffnen oder Schließen aller Kanten in der Box gültig. Daher gilt $N_L^0 = N_L^1 = m$ fast sicher.

Sei

$$A_L^2 := \bigcup_{x^1, x^2 \in B_L \setminus B_{L-1}} \left(\{C^p(x^1) \cap C^p(x^2) = \emptyset\} \cap \{\#C^p(x^1) = \#C^p(x^2) = \infty\} \right).$$

Das ist das Ereignis, dass es zwei Punkte auf dem Rand von B_L gibt, die in unterschiedlichen unendlich großen offenen Clustern liegen.

- Es gilt

$$A_L^2 \uparrow \{N \geq 2\} \quad (L \rightarrow \infty)$$

- Analog definieren wir $A_{L,0}^2$, wobei alle Kanten $k \in K_L$ als geschlossen betrachtet werden

Schritt 2: Ausschluss von $m \geq 2$

- Tritt A_L^2 ein, so existieren zwei Punkte x^1, x^2 auf dem Rand von B_L
- Zu jedem $i = 1, 2$ gibt es einen unendlich langen selbstüberschneidungsfreien offenen Pfad π_{x^i} , der in x^i startet und x^{3-i} vermeidet
- Schließt man alle Kanten in K_L , bleiben diese unendlich großen Cluster getrennt

$$A_L^2 \subseteq A_{L,0}^2$$

- Wähle L so groß, dass

$$\mathbb{P}_p(A_{L,0}^2) > 0$$

- Tritt $A_{L,0}^2$ ein und man öffnet alle Kanten in K_L , dann werden die beiden unendlichen Cluster innerhalb von B_L verbunden
- Dadurch verringert sich die Anzahl unendlicher Cluster um mindestens 1

Widerspruch zu Schritt 1

Es folgt

$$\mathbb{P}_p(N_L^1 \leq N_L^0 - 1) \geq \mathbb{P}_p(A_{L,0}^2) > 0.$$

Aus Schritt 1 folgt aber

$$N_L^0 = N_L^1 = m \quad \text{fast sicher.}$$

Dies widerspricht

$$N_L^1 \leq N_L^0 - 1.$$

Damit ist gezeigt:

$$\mathbb{P}_p(N = m) = 0 \quad \text{für alle } m \in \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Zwischenstand

Es bleibt nur noch

$$N \in \{0, 1, \infty\}$$

als möglicher fast sicherer Wert.

Schritt 3: $N = \infty$ ist unmöglich

Zu zeigen

$$\mathbb{P}_p(N \geq 3) = 0.$$

Idee

Wenn es mindestens drei unendliche Cluster gäbe, dann müssten lokal Trifurkationspunkte entstehen. Aber geometrisch gibt es dafür am Rand zu wenig Platz.

Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}_p(N \geq 3) > 0$$

gilt.

Definition

Ein Punkt $x \in \mathbb{Z}^d$ heißt **Trifurkationspunkt**, falls

- x in einem unendlichen offenen Cluster liegt
- genau drei offene Kanten zu x führen
- nach Entfernen dieser drei Kanten der Cluster in drei unendliche Teile zerfällt

Wir schreiben

$$T := \text{Menge der Trifurkationspunkte}, \quad T_L := T \cap B_L.$$

Sei

$$r := \mathbb{P}_p(0 \in T).$$

Wegen Translationsinvarianz gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[\#T_L] &= (\#B_L)r, \\ r &= (\#B_L)^{-1}\mathbb{E}_p[\#T_L] \quad \forall L.\end{aligned}$$

Bedeutung

Wenn $r > 0$ ist, erwartet man in B_L ungefähr $r(\#B_L)$ Trifurkationspunkte.

Sei

$$A_L^3 := \bigcup_{x^1, x^2, x^3 \in B_L \setminus B_{L-1}} \left(\bigcap_{i \neq j} \{C^p(x^i) \cap C^p(x^j) = \emptyset\} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^3 \{\#C^p(x^i) = \infty\} \right).$$

- A_L^3 bedeutet: Drei verschiedene unendliche Cluster treffen den Rand von B_L
- Es gilt

$$A_L^3 \uparrow \{N \geq 3\} \quad (L \rightarrow \infty)$$

- Analog definieren wir $A_{L,0}^3$, wenn alle Kanten in K_L geschlossen sind
- Dann gilt $A_L^3 \subseteq A_{L,0}^3$

Aus drei Clustern werden drei Randpunkte

Für drei unterschiedliche Punkte $x^1, x^2, x^3 \in B_L \setminus B_{L-1}$ sei F_{x^1, x^2, x^3} das Ereignis, dass es zu jedem $i = 1, 2, 3$ einen unendlich langen selbstüberschneidungsfreien offenen Pfad π_{x^i} gibt, der

- in x^i startet
- nur Kanten aus $K^p \setminus K_L$ benutzt
- die anderen $x^j, j \neq i$, vermeidet

Dann gilt

$$A_{L,0}^3 \subseteq \bigcup_{\substack{x^1, x^2, x^3 \in B_L \setminus B_{L-1} \\ \text{paarweise unterschiedlich}}} F_{x^1, x^2, x^3}.$$

Wähle L so groß, dass $\mathbb{P}_p(A_{L,0}^3) > 0$ gilt. Dann gibt es drei unterschiedliche Punkte x^1, x^2, x^3 mit

$$\mathbb{P}_p(F_{x^1, x^2, x^3}) > 0.$$

- Tritt F_{x^1, x^2, x^3} ein, so können wir einen Punkt $y \in B_L$ finden, von dem aus drei disjunkte, nicht notwendigerweise offene Pfade π_1, π_2, π_3 zu x^1, x^2, x^3 führen
- Sei G_{y, x^1, x^2, x^3} das Ereignis, dass in K_L genau diejenigen Kanten offen sind, die zu diesen Pfaden gehören, und alle anderen geschlossen sind
- Die Ereignisse F_{x^1, x^2, x^3} und G_{y, x^1, x^2, x^3} sind unabhängig
- Falls beide eintreten, ist y ein Trifurkationspunkt

Folge

$$r = \mathbb{P}_p(y \in T) \geq \mathbb{P}_p(F_{x^1, x^2, x^3}) \cdot (p \wedge (1 - p))^{\#K_L} > 0.$$

Warum muss aber $r = 0$ gelten?

Wenn $r > 0$ wäre, gäbe es in einer großen Box ungefähr

$$r(\#B_L)$$

Trifunktionspunkte.

Volumen gegen Rand

- Das Volumen wächst wie L^d
- Der Rand wächst nur wie L^{d-1}

Jeder Trifunktionspunkt erzwingt aber mindestens einen Ausgang zum Rand. Dafür gibt es asymptotisch zu wenig Randpunkte.

Man konstruiert einen Hilfsgraphen H_L aus

$$H_L = U_L \cup T_L,$$

wobei

- T_L die Trifurkationspunkte in B_L sind
- $\tilde{K}_L$ die Menge aller Kanten ist, die mindestens einen Endpunkt in B_L haben
- Äquivalenzrelation R : Zwei Kanten sind äquivalent, wenn es einen offenen Pfad gibt, der keinen Trifurkationspunkt trifft und von jeder der beiden Kanten mindestens einen Endpunkt trifft
- $U_L := \tilde{K}_L / R$ die Menge der Äquivalenzklassen ist

Definition

Jeder Punkt $x \in T_L$ ist mit genau drei Punkten aus U_L benachbart. Die Punkte aus U_L können

- isoliert sein
- an beliebig viele Punkte aus T_L angrenzen
- nicht an Punkte aus U_L angrenzen

Schleife

Eine **Schleife** ist ein selbstüberschneidungsfreier endlicher Pfad, der zu seinem Startpunkt zurückkehrt.

Wichtig

Der Graph H_L ist schleifenfrei.

Definition

$\deg_{H_L}(h)$ ist der **Grad** von $h \in H_L$, also die Anzahl der Nachbarn von h in H_L . Ein Punkt h mit $\deg_{H_L}(h) = 1$ heißt ein **Blatt** von H_L .

Sei nun $Z \subset H_L$ eine Zusammenhangskomponente, die mindestens einen Punkt $x \in T_L$ enthält. Da Z ein Baum ist, gilt

$$\#Z - 1 = \frac{1}{2} \sum_{h \in Z} \deg_{H_L}(h).$$

Diese Formel lässt sich so umstellen, dass man die Anzahl der Blätter bestimmen kann

$$\begin{aligned} \#\{u \in Z : \deg_{H_L}(u) = 1\} &= 2 + \sum_{h \in Z} (\deg_{H_L}(h) - 2)^+ \\ &\geq 2 + \#\{h \in Z : \deg_{H_L}(h) \geq 3\} \\ &\geq 2 + \#(Z \cap T_L) \geq \#T_L \end{aligned}$$

- Jedes Blatt $u \in H_L$ gehört zu einem unendlich großen offenen Cluster
- Daher enthält u mindestens eine Kante, die den Rand

$$B_L \setminus B_{L-1}$$

berührt

- Verschiedene Blätter gehören zu verschiedenen Clustern
- Deshalb entsprechen verschiedenen Blättern verschiedene Randpunkte
- Die Anzahl der Blätter kann also nicht größer sein als die Anzahl der Randpunkte
- Da es mindestens so viele Blätter wie Trifurkationspunkte gibt, folgt

$$\#T_L \leq \#(B_L \setminus B_{L-1})$$

Randabschätzung

Wir erhalten

$$\frac{\#T_L}{\#B_L} \leq \frac{\#(B_L \setminus B_{L-1})}{\#B_L} \leq \frac{d}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Erwartungswerte

Durch Erwartungswerte folgt

$$r = \mathbb{P}_p(0 \in T) = \frac{\mathbb{E}_p[\#T_L]}{\#B_L} \leq \frac{\#(B_L \setminus B_{L-1})}{\#B_L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist $r = 0$, im Widerspruch zu $r > 0$.

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_p(N \geq 3) = 0.$$

Wir haben gezeigt:

- N ist fast sicher konstant
- $N = m$ mit endlichem $m \geq 2$ ist unmöglich
- $N = \infty$ ist unmöglich

Damit bleibt nur

$$N \in \{0, 1\} \quad \text{fast sicher.}$$

Ergebnis

$$\mathbb{P}_p(N \leq 1) = 1.$$

Existenz

Für $d \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) \leq \frac{2}{3}.$$

Eindeutigkeit

Für jedes $p \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbb{P}_p(N \leq 1) = 1.$$

Kernaussage

Perkolations bedeutet nicht viele unendliche Cluster, sondern fast sicher höchstens einen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!