Vorkurs: Logik für die Informatik

Thomas Zeume

Präsenzblatt

Hinweis

Die Beispiellösungen sind nur für die Vorbereitung der Übung gedacht. Die Aufgaben werden in der Präsenzübung bearbeitet und besprochen, die Beispiellösungen werden aber nicht herausgegeben.

Präsenzaufgabe 1 [Kuchen]

Wieder einmal wurden über das Wochenende so einige dreckige Kaffeetassen in der Küche der Fachschaft hinterlassen. Da nach einem Fachschaftsbeschluss jeder einen Kuchen mitbringen muss, der seine Kaffeetasse ungespült in der Küche hinterlässt, kommt es zu heftigen Diskussionen, wer denn die Schuldigen sind. Nach einiger Zeit ist man sich über Folgendes einig:

(1) Es wurden von mindestens einer und höchstens drei Personen dreckige Kaffeetassen hinterlassen. Nur die üblichen Verdächtigen Micky, Goofy und Pluto kommen für das Chaos in Frage.

(2) Immer wenn Pluto seine dreckige Tasse stehen lässt, lässt auch Goofy seine dreckige Tasse stehen.

(3) Da Micky nicht weiß wie man Kaffee kocht, hat er seine dreckige Tasse nur stehen gelassen, wenn Goofy oder Pluto das auch gemacht hat.

a) Modelliert diese Situation mit Hilfe der Aussagenlogik. Gebt dazu zunächst die verwendeten aussagenlogischen Variablen **und deren intendierte Bedeutung** an. Stellt anschließend aussagenlogische Formeln auf, die den Sachverhalt beschreiben.

b) Ist Goofy mitschuldig? Wie lässt sich das mit Hilfe der Formeln aus Aufgabenteil a) begründen?

Lösungsvorschlag:

a) Wir benutzen die folgenden aussagenlogischen Variablen zur Modellierung des Sachverhaltes:

- M: Micky ist schuldig.
- G: Goofy ist schuldig.
- P: Pluto ist schuldig.

Jetzt modellieren wir die Aussagen (1)-(3) durch aussagenlogische Formeln. Nach Aussage (1) ist Micky oder Goofy oder Pluto beteiligt, möglicherweise auch mehr als eine Person:

$$\varphi_1 = M \vee G \vee P$$

Die zweite Aussage lässt sich schreiben als:

$$\varphi_2 = P \rightarrow G$$

In der dritten Aussage kommt das Schlüsselwort 'nur' vor. Sie ist gleichbedeutend mit „Wenn Micky seine dreckige Tasse stehen gelassen hat, dann haben auch Goofy oder Pluto die Tasse stehen gelassen.“ und kann daher wie folgt als Formel geschrieben werden:

$$\varphi_3 = M \rightarrow (G \vee P)$$

Alle drei Aussagen zusammen werden also durch folgende Formel modelliert:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = (M \vee G \vee P) \wedge (P \rightarrow G) \wedge (M \rightarrow (G \vee P))$$

b) Wir wollen zeigen, dass Goofy mitschuldig ist. Dazu schauen wir uns die Wahrheitstabelle von φ an:

$\alpha(M)$	$\alpha(G)$	$\alpha(P)$	$[\![\varphi_1]\!]_\alpha$	$[\![\varphi_2]\!]_\alpha$	$[\![\varphi_3]\!]_\alpha$	$[\![\varphi]\!]_\alpha$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Jede Belegung, die die Formel φ wahrmacht, entspricht einer möglichen Gruppe von Schuldigen. In allen φ wahrmachenden Belegungen α gilt aber $\alpha(G) = 1$. Somit ist Goofy auf jeden Fall mitschuldig.

Präsenzaufgabe 2 [Multiple Choice]

Welche der folgenden Antworten sind korrekt?

(a) Alle folgenden Antworten

(b) Keine der folgenden Antworten

(c) Alle vorherigen Antworten

(d) Genau eine der vorherigen Antworten

(e) Keine der vorherigen Antworten

(f) Keine der vorherigen Antworten

Lösungsvorschlag:

Wir verwenden die folgenden aussagenlogischen Variablen:

A: Antwort (a) ist korrekt

B: Antwort (b) ist korrekt

C: Antwort (c) ist korrekt

D: Antwort (d) ist korrekt

E: Antwort (e) ist korrekt

F: Antwort (f) ist korrekt

Aus den Formulierungen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
\varphi_A &= A \leftrightarrow (B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F)\\
\varphi_B &= B \leftrightarrow (\neg C \wedge \neg D \wedge \neg E \wedge \neg F)\\
\varphi_C &= C \leftrightarrow (A \wedge B)\\
\varphi_D &= D \leftrightarrow \big((A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)\big)\\
\varphi_E &= E \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D)\\
\varphi_F &= F \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge \neg E)
\end{aligned}$$

Wir versuchen nun, eine erfüllende Belegung α für diese Formelmenge zu finden. Falls $\alpha(A) = 1$, so folgt $\alpha(B) = \alpha(C) = 1$ durch φ_A. Es ergibt sich ein Widerspruch mit φ_B, da dies $\alpha(C) = 0$ erzwingen würde. Also gilt $\alpha(A) = 0$ und, φ_C folgend, auch $\alpha(C) = 0$. Falls $\alpha(B) = 1$, so folgt $\alpha(D) = 0$ aus φ_B, aber es gibt einen Widerspruch mit φ_D, da diese Formel $\alpha(D) = 1$ erzwingen würde. Also gilt $\alpha(B) = 0$. Aus φ_D folgt $\alpha(D) = 0$. Damit folgt $\alpha(E) = 1$ aus φ_E und $\alpha(F) = 0$ aus φ_F. Antwort (e) ist also die einzige korrekte Antwort.