

Vorkurs

Karin Baur

Die Unterlagen für die Wochen drei und vier vom Vorkurs der Fakultät für Mathematik.

Vorlesungen jeweils 10:15-11:45.

Woche 3: 15.9-17.9: HID; 18.9: HGA 10; 19.9: HIC

Woche 4: 22.9-26.09: HIC

Karin Baur
Bochum

Kapitel 8. Primzahlen	3
8.1. Zahlenbereiche	3
8.2. Beweisstrategien	3
8.3. Primzahlen und Teilbarkeit	4
8.4. Auffinden einer PFZ in der Praxis	5
Kapitel 9. Mächtigkeit von Mengen	7
9.1. “Grössenvergleiche” von Mengen	7
Kapitel 10. Polynome	9
10.1. Erste Begriffe	9
10.2. Polynomgleichungen - Auffinden von Nullstellen	9
10.3. Der Fundamentalsatz der Algebra	12
Kapitel 11. Die Exponentialfunktion	13
11.1. Erste Eigenschaften	13
Kapitel 12. Die Ableitung	18
12.1. Polynome, Exponentialfunktion	18
12.2. Ableitungsregeln	18
12.3. Extremwertprobleme	20
Kapitel 13. Integration	21
13.1. Erste Eigenschaften, Regeln und Beispiele	21
Kapitel 14. Lineare Algebra und Vektorrechnung	23
14.1. Matrizen	23
14.2. Vektoren, lineare Abhängigkeit	24
14.3. Inverse von 2×2 -Matrizen	26

Kapitel 8. Primzahlen

[Vorlesung Mo, 15.9.2025]

8.1. Zahlenbereiche.

	$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
	natürliche Z.		ganze Z.		rationale Z.		reelle Z.		komplexe Z.
Operationen	Addition, Multiplikation		Subtraktion		Division durch $y \neq 0$		$\sqrt{x}, x \geq 0$ $e^x, \log x$		$\sqrt{-1}, \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{C}$ beliebig

Zur Notation: $\mathbb{N}$ bezeichnet oft die positiven ganzen Zahlen, manchmal ist 0 mitgemeint. Und manchmal schreiben wir $\mathbb{N}_0$ für $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

BEMERKUNG 8.1.1. (1) Die Inklusionen sind strikt - Beispiele dazu?

(2) Zu den Erweiterungen: Beispiele von Gleichungen, die nicht lösbar sind und für die wir zu einem "grösseren" Bereich gehen müssen.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: die Gleichung $x + 2 = 0$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: $2x + 1 = 0$ nicht lösbar in $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $x^2 = 2$ nicht lösbar in $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $x^2 = -1$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$.

(3) Die ersten vier Zahlenbereiche sind geordnet, wir können je zwei Elemente von ihnen immer mit $\leq$ vergleichen. Der Zahlenbereich $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet.

(4) Die letzten drei sind sogenannte Körper: Körper werden später behandelt, in der linearen Algebra. Kurz gesagt: wir können addieren und subtrahieren, es gibt ein neutrales Element dafür, die 0. Wir können multiplizieren und durch Element $\neq 0$ teilen, es gibt ein neutrales Element dafür, die 1. Addition und Multiplikation sind kommutativ (es gilt $a + b = b + a$ für alle a, b und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b) und es gelten die Distributivgesetze $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, für alle a, b, c im jeweiligen Bereich.

8.2. Beweisstrategien. Wir werden oft die folgenden Beweisstrategien verwenden:

- Vollständige Induktion
- direkter Beweis
- Widerspruchsbeweis

Ein Beispiel eines Widerspruchsbeweises geben wir beim Beweis der folgenden Aussage.

Satz 8.2.1. Die Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ist nicht rational.

BEWEIS. Annahme: $\sqrt{2}$ liegt in $\mathbb{Q}$. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, mit

$$(8.1) \quad \sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass m, n teilerfremd ist (also, dass $\text{ggT}(m, n) = 1$ gilt). Wir können (8.1) umformen (quadrieren, umstellen) und erhalten daraus:

$$(8.2) \quad 2n^2 = m^2.$$

Aus (8.2) folgt, dass m^2 gerade sein muss. Und daraus wiederum, dass m gerade sein muss (wäre m ungerade, so wäre auch m^2 ungerade). Also können wir m schreiben als $m = 2m'$ mit einem $m' \in \mathbb{Z}$ (das auch ganzzahlig ist). Wir setzen $m = 2m'$ in (8.2) ein und erhalten:

$$2n^2 = m^2 \iff 2n^2 = (2m')^2 \iff 2n^2 = 4(m')^2 \iff n^2 = 2(m')^2.$$

Analog wie oben sagt das, dass n^2 gerade sein muss, also muss auch n gerade sein.

Dann sind sowohl m als auch n gerade, also beide ein Vielfaches von 2, bzw. sind beide durch 2 teilbar. Das ist ein Widerspruch dazu, dass sie teilerfremd sind. Daher kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein. $\square$

8.3. Primzahlen und Teilbarkeit.

Definition 8.3.1. Eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ (bzw. $k \in \mathbb{Z}$) *teilt* die Zahl $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{Z}$) geschrieben als $k \mid n$, falls $l \in \mathbb{N}$ (bzw. $l \in \mathbb{Z}$) existiert mit $k \cdot l = n$.

Definition 8.3.2. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heisst *prim* (oder *Primzahl*), falls sie genau zwei Teiler in $\mathbb{N}$ hat. Diese Teiler sind dann n und 1 (und $n \neq 1$). Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Beispiel 8.3.3. Die Zahl 3 hat in $\mathbb{Z}$ vier Teiler $1, -1, 3, -3$. Und in $\mathbb{N}$ hat sie genau zwei Teiler, 1 und 3.

Satz 8.3.4 (Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt Primzahlen $p_1, \dots, p_l \in \mathbb{P}$ und natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}$, so dass*

$$(8.3) \quad n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l}$$

Dabei ist $l \in \mathbb{N}$ und die p_i sind paarweise verschieden (d.h. $p_i \neq p_j$ falls $i \neq j$).

Eine Darstellung von n wie in (8.3) nennt man auch die (eindeutige) *Primfaktorzerlegung (PFZ)* von n .

Vor dem Beweis ein Hinweis: Satz 8.3.4 hat zwei Aussagen: einerseits die Existenz einer Zerlegung in Primfaktoren und andererseits ihre Eindeutigkeit. Wir werden beide zeigen.

BEWEIS. (1) Zur Existenz: wir zeigen sie mit Induktion über n .

I.A. Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1, 2, 3$ (müsste man nur für $n = 1$ überprüfen...).

I.V. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass n eine PFZ besitzt.

I.S. Wir betrachten $n + 1 \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass auch $n + 1$ eine PFZ besitzt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

- (i) $n + 1$ ist prim. Dann ist $p_1 = n + 1, n_1 = 1$ und die gewünschte Zerlegung in Primfaktoren ist gerade $n + 1 = p_1$.
- (ii) $n + 1$ ist nicht prim. Dann existieren $b, k \in \mathbb{N}$ mit $1 < b, k < n + 1$ und $n + 1 = b \cdot k$. Da $b, k \leq n$ gilt, besitzen die beiden eine Primfaktorzerlegung. Etwa $b = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l}$ und $k = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$, wobei die p_i und die q_j alle in $\mathbb{P}$ sind, die n_i, m_j alle in $\mathbb{N}$ und $l, r \in \mathbb{N}$.

Wir multiplizieren die beiden zusammen. Unter den Faktoren p_i von b und den Faktoren q_j von k können gewisse in beiden auftreten, wir können diese zusammenfassen und das Produkt dann neu schreiben (ganz rechts):

$$n + 1 = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l} \cdot q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} = \tilde{p}_1^{b_1} \cdots \tilde{p}_t^{b_t}$$

mit $\tilde{p}_i$ Primzahlen, $b_i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{N}$.

(2) Zur Eindeutigkeit von (8.3): wir können dies mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Hier die Beweisidee.

Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen,

$$n = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l} = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$$

wobei die p_i, q_j alle prim sind, die Faktorisierungen nicht die gleichen sind (auch nach Ummumerierung), $l, r \in \mathbb{N}$ sowie $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ gelten.

In $\mathbb{N}$ sind die Zahlen wohlgeordnet, wir können also das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit zwei verschiedenen Faktorisierungen wählen.

- (i) Zuerst argumentieren wir, dass $\{p_1, \dots, p_l\} \cap \{q_1, \dots, q_r\} = \emptyset$ gilt (es gibt keine gemeinsamen Faktoren in den beiden Faktorisierungen). Gäbe es ein i , $1 \leq i \leq l$ und ein j , $1 \leq j \leq r$ mit $p_i = q_j$, dann wäre $\frac{n}{p_i} = \frac{n}{q_j}$ auch in $\mathbb{N}$ und hätte ebenfalls zwei verschiedene PFZ. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n minimal ist mit dieser Eigenschaft. Also sind die beiden Mengen disjunkt.
- (ii) Jeder Faktor p_i in n teilt n . Insbesondere teilt p_1 die Zahl n . Und das $n = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$ gilt, haben wir auch $p_1 \mid q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$. Da p_1 und die q_j alle prim sind, geht das nur, wenn p_1 einer der Faktoren $q_1, \dots, q_r$ ist. Das ist ein Widerspruch zu (i).

□

Beispiele 8.3.5. So ist etwa $12 = 2^2 \cdot 3$, also $l = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ und $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, mit $l = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$.

[Vorlesung Di, 16.9.2025]

Theorem 8.3.6 (Satz von Euklid). *Die Menge $\mathbb{P}$ ist unendlich.*

Wir können einen Widerspruchsbeweis führen.

BEWEIS. Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, also $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_l\}$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_l + 1$. Es ist $n > p_i$ für jedes i . Daraus folgt: $n \notin \mathbb{P}$.

Ausserdem ist $n \in \mathbb{N}$, nach Satz 8.3.4 besitzt also n eine Zerlegung in Primfaktoren. D.h. unter den (endlich vielen) Primzahlen gibt es welche, die n teilen. Sagen wir, $p_j \mid n$, wobei $j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = k \cdot p_j$. Es folgt:

$$\begin{aligned} n &= p_1 p_2 \cdots p_l + 1 = k p_j \\ \implies k \cdot p_j - p_1 \cdots p_l &= 1 \\ \iff \underbrace{p_j}_{>1} \underbrace{(k - p_1 \cdots p_{j-1} \cdot p_{j+1} \cdots p_l)}_{\neq 0} &= 1 \end{aligned}$$

In dem Term auf der linken Seite ist $p_1 > 1$ und der Faktor $(k - p_2 \cdots p_l)$ ist betragsmässig ≥ 1 . Ihr Produkt kann also nicht gleich 1 sein und wir haben einen Widerspruch. □

8.4. Auffinden einer PFZ in der Praxis. Teilbarkeitstests helfen dabei. Für kleine Primzahlen sind das die folgenden:

Die Zahl n ist teilbar

- durch 2, wenn die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung durch 2 teilbar ist,
- durch 3, wenn die Quersumme der Ziffern durch 3 teilbar ist,
- durch 5, wenn die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung durch 5 teilbar ist,
- durch 7, wenn die Zahl $a - 2b$ durch 7 teilbar ist, wobei a die Zahl ist, die durch streichen der letzten Dezimalziffer von n entsteht und b die letzte Dezimalziffer von n ist (siehe Satz 8.4.2 unten),
- durch 11, wenn... (die alternierende Summe der Ziffern 0 ist)?
- durch 9, wenn...? durch 6, wenn...? Warum ist es nicht nötig, 6 und 9 zu betrachten?

Beispiel 8.4.1. Wir illustrieren den Test für $p = 7$. Sei $n = 343$. Dann ist $a = 34$ und $b = 3$.

$$\begin{aligned} a - 2b &= 34 - 2 \cdot 3 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Die Zahl 28 ist durch 7 teilbar, also ist (nach Satz 8.4.2) auch n durch 7 teilbar.

Satz 8.4.2. Es sei $n = 10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Dann gilt:

$$7 \mid n \iff 7 \mid a - 2b.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} 7 \mid n &\iff 7 \mid (10a + b) && \text{subtrahieren } 7a \\ &\iff 7 \mid (3a + b) && \text{multiplizieren mit 5} \\ &\iff 7 \mid (15a + 5b) && \text{subtrahieren } 14a, \text{ sowie } 7b \\ &\iff 7 \mid (a - 2b) \end{aligned}$$

□

Zwei Bemerkungen zum Beweis von Satz 8.4.2:

Zur ersten Umformung (Subtraktion von Vielfachen von 7): Ist eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so ist $m - 7a$ genauso durch 7 teilbar, da $7a$ ein Vielfaches von 7 ist. Und umgekehrt: sind m, a in $\mathbb{N}$ und ist $m - 7a$ durch 7 teilbar, so ist auch m durch 7 teilbar. Analog für die dritte Umformung.

Zur zweiten Umformung: ist eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so ist auch $5m$. Und umgekehrt: ist ein Vielfaches von 5, sagen wir $5x$, mit $x \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so auch x selbst durch 7 teilbar. Das geht, weil 5 und 7 verschiedene Primzahlen sind.

Kapitel 9. Mächtigkeit von Mengen

Zur Abkürzung schreiben wir $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

9.1. “Grössenvergleiche” von Mengen.

Definition 9.1.1. Es sei A eine Menge.

- Die Menge A ist *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \rightarrow [n]$ gibt. Die Zahl n heisst dann die *Mächtigkeit* oder die *Kardinalität* von A .
- Eine Menge A heisst *unendlich*, falls A nicht endlich ist. Die Menge A heisst *abzählbar unendlich*, falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.
- Eine Menge A heisst *überabzählbar*, falls sie unendlich und nicht abzählbar unendlich ist. Die Menge A heisst *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Beispiele 9.1.2. Die Mengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ sind alle abzählbar, auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Die Mengen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind überabzählbar.

BEMERKUNG 9.1.3. Sind A, B endliche Mengen, so haben wir folgende Grössenvergleiche:

$$\begin{aligned} |A| = |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ bijektiv,} \\ |A| \leq |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ injektiv,} \\ |A| \geq |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Wir können dies verallgemeinern zu einer Definition.

Definition 9.1.4. Seien A, B zwei beliebige Mengen (endlich oder unendlich). Wir schreiben

$$\begin{aligned} |A| = |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ bijektiv,} \\ |A| \leq |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ injektiv,} \\ |A| \geq |B| &\iff \exists f : A \rightarrow B \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

BEMERKUNG 9.1.5. Zurück zu Beispiel 9.1.2 (ohne Beweise):

- Es ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$, denn die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n + 1$, ist eine Bijektion.
- Es ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, denn die Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, die definiert ist durch

$$g(n) = \begin{cases} k - 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist, } n = 2k \\ -k & \text{falls } k \text{ ungerade ist, } n = 2k - 1. \end{cases}$$

ist eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Man kann die Abbildung g zur Illustration auf $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ anwenden, um sich zu überzeugen, dass wirklich alle ganzen Zahlen erreicht werden.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$g(n)$	-1	0	-2	1	-3	2	-4	...

- Man kann eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finden, um $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ zu zeigen.

Für $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$: es ist klar, dass $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ ist (wieso? man kann die natürlichen Zahlen in $\mathbb{Q}$ “einbetten”). Um zu sehen, dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ gilt: Die Darstellungen als Bruch können dabei benutzt werden (Satz von Cantor-Bernstein-Schröder, “Diagonalabzählen” - nicht gekürzte Brüche werden übersprungen). Siehe Abbildung 1. Man kann die positiven Brüche durchzählen, indem man bei $1 = \frac{1}{1}$ anfängt und dann sukzessive den Pfeilen nach durchgeht.

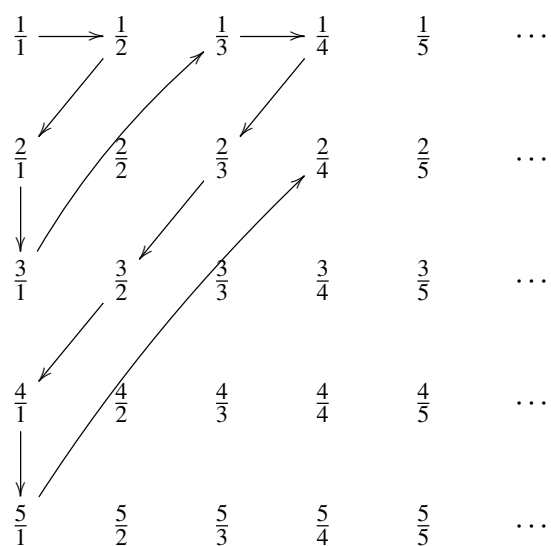


ABBILDUNG 1. Die Brüche können mit $\mathbb{N}$ abgezählt werden.

Kapitel 10. Polynome

[Vorlesung Mi, 17.9.2025]

10.1. Erste Begriffe.

Definition 10.1.1. Ein *Polynom vom Grad* $d \in \mathbb{N}_0$ mit *Koeffizienten in* $\mathbb{R}$ ist ein Ausdruck der Form

$$(10.1) \quad a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei x die Variable ist, $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten mit $a_d \neq 0$. Wir schreiben $\mathbb{R}[x]$ für die Menge der Polynome (in der Variablen x) mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

Ausdruck	Ein Polynom?	Grad des Polynoms
$5x^2 + 1$	ja	2
$3x^4 - 2x + 15$	ja	4
$\sin(x) + x^2$	nein	–
$2x^2 + 2^x$	nein	–
15	ja	0

Ein Polynom vom Grad 0 wird *ein konstantes Polynom* genannt.

BEMERKUNG 10.1.2. Analog definiert man $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ als die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$. Man kann auch andere Koeffizientenmengen haben (etwa $\mathbb{Z}_3$ oder $\mathbb{Z}_6$ oder als Koeffizienten Polynome in einer anderen Variablen). $\mathbb{R}[t]$ sind die Polynome in t mit reellen Koeffizienten.

Definition 10.1.3. Eine *Polynomfunktion* ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder auch andere Zahlenbereiche, z.B. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), so dass ein $p \in \mathbb{R}[x]$ existiert mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.2. Polynomgleichungen - Auffinden von Nullstellen. Wir schreiben $\deg(p)$ für den Grad des Polynoms p . Sei $p(x) = 0$ eine Polynomgleichung für das Polynom p . Wir beschreiben mögliche Polynomfunktionen vom Grad d und die Lösungen von $p(x) = 0$ für kleine Grade.

- $d = 1$: Es handelt sich um eine *lineare Gleichung*, $ax + b = 0$, mit $a \neq 0$. Ihre Lösung ist $x = -\frac{b}{a}$.
- $d = 2$: Es handelt sich um eine *quadratische Gleichung*, sagen wir $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_2 \neq 0$. Wir dividieren alles durch a_2 und setzen $a := \frac{a_1}{a_2}$, $b := \frac{a_0}{a_2}$, dann ist die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$, also normiert (Leitkoeffizient ist = 1). Deren Lösungen sind

$$x_{1,2} = -\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 4b}{4}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

Der Ausdruck $\Delta_2 := \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ ist die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung.

Die Lösungsformel kann man mittels quadratischem Ergänzen herleiten:

$$\begin{aligned}
 x^2 + ax + b &= 0 \\
 \iff x^2 + ax + \left(\frac{a^2}{2}\right) - \left(\frac{a^2}{2}\right) + b &= 0 \\
 \iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \\
 x + \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \\
 x &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}
 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung hängen von Δ_2 ab, insbesondere die Anzahl der Lösungen in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$:

$$\Delta_2 \begin{cases} > 0: & \text{zwei unterschiedliche reelle Lösungen,} \\ = 0: & \text{eine reelle Lösung der Vielfachheit zwei,} \\ < 0: & \text{zwei unterschiedliche komplexe Lösungen.} \end{cases}$$

- $d = 3$: Hier handelt es sich um eine *kubische Gleichung*. Wir können kubische Gleichungen reduzieren, so dass der Term mit x^2 wegfällt und der Koeffizient zu x^3 gerade gleich 1 ist.

Also können wir annehmen, dass die kubische Gleichung die Form

$$(10.2) \quad x^3 + ax + b = 0$$

hat (die Begründung für diese Reduktion ist in Bemerkung 10.2.1 unten).

Für eine solche Gleichung (mit Koeffizient 1 vor x^3 und mit Koeffizient 0 bei x^2) findet man eine Lösung mit dem folgenden Ansatz: man nimmt an, dass $x = u + v$ ist und erhält mit weiteren Umformungen, dass das folgende x eine Lösung ist:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta_3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta_3}},$$

wobei $\Delta_3 := \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ die Diskriminante ist, sowie

$$\begin{aligned}
 u^3 &= -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \\
 v^3 &= -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass die kubische Gleichung für $\Delta_3 < 0$ drei verschiedene reelle Lösungen hat, für $\Delta_3 = 0$ zwei reelle Lösungen, wobei eine doppelte Vielfachheit hat und für $\Delta_3 > 0$ eine reelle, sowie zwei komplex konjugierte Lösungen hat. Man bestimmt dann eine erste Lösung x mit der obigen Formel und kann durch Polynomdivision zu einem Polynom vom Grad zwei übergehen, für das man die Lösungsformel der quadratischen Gleichung nimmt. Im Beispiel 10.2.2 (2) wird das illustriert.

BEMERKUNG 10.2.1. Es sei $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ eine kubische Gleichung. Der Koeffizient a_3 ist nicht Null, denn sonst wäre die Gleichung nicht vom Grad drei. Um ihre Lösungen zu finden, können wir zuerst alle Koeffizienten durch a_3 teilen und erhalten eine ("normierte") Gleichung der Form $x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$ mit Koeffizienten $b_2 = \frac{a_2}{a_3}$, $b_1 = \frac{a_1}{a_3}$ und $b_0 = \frac{a_0}{a_3}$. Diese kann

durch kubische Ergänzung weiter umgeformt werden, so dass der Term mit x^2 verschwindet. Wir definieren

$$y := x + \frac{b_2}{3}, \quad a := b_1 - \frac{b_2^2}{3} \quad \text{und} \quad b := \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2b_1}{3} + b_0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y^3 + ay + b &= \left(x + \frac{b_2}{3}\right)^3 + \left(b_1 - \frac{b_2^2}{3}\right)\left(x + \frac{b_2}{3}\right) + \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2b_1}{3} + b_0 \\ &= \overbrace{x^3 + 3\frac{b_2x^2}{3} + 3\frac{b_2^2x}{3^2} + \frac{b_2^3}{3^3}}^{=y^3} + \overbrace{\left(b_1 - \frac{b_2^2}{3}\right)\left(x + \frac{b_2}{3}\right)}^{=ay} + \overbrace{\frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2b_1}{3} + b_0}^{=b} \\ &= x^3 + b^2x^2 + \frac{b_2^2x}{3} + \frac{b_2^3}{27} + b_1x + \frac{b_1b_2}{3} - \frac{b_2^2x}{3} - \frac{b_2^3}{9} + \frac{2b_2^3}{27} - \frac{b_2b_1}{3} + b_0 \\ &= x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Die Gleichung $y^3 + ay + b = 0$ (mit y, a und b wie oben gewählt) hat also die genau gleichen Lösungen wie die normierte Gleichung $x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$.

Beispiel 10.2.2. Wir illustrieren die Lösungsformeln für $d = 2, 3$.

(1) Grad $d = 2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ \iff x^2 &= -1 \\ \iff x &= \pm i \end{aligned}$$

Oder mit der Lösungsformel: $x = 0 \pm \sqrt{\Delta_2} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$.

(2) Grad $d = 3$: wir betrachten $p(x) = x^3 - 15x - 4 = 0$, also $a = -15$ und $b = -4$, somit ist $\Delta_3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 4 - 125 = -121 = -(11^2)$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \\ &= (2-i) + (2+i) = 4. \end{aligned}$$

(Man kann nachrechnen, dass $(2-i)^3 = 2+11i$ ist und dass $(2+i)^3 = 2-11i$ ist, siehe auch Beispiel 11.1.11.) Durch Polynomdivision findet man $p(x) = (x-4)(x^2 + 4x + 1)$, also sind die weiteren Nullstellen (mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Die Polynomdivision ausgeführt:

$$\begin{array}{rcl}
 x^3 + 0 \cdot x^2 - 15x - 4 & : (x - 4) & = x^2 + 4x + 1 \\
 \underline{-(x^3 - 4x^2)} & & \\
 4x^2 - 15x - 4 & & \\
 \underline{-(4x^2 - 16x)} & & \\
 x - 4 & & \\
 \underline{-(x - 4)} & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

10.3. Der Fundamentalsatz der Algebra. [Vorlesung Do, 18.9.2025]

Die Aussage des Fundamentalsatzes ist die folgende: Jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. es existiert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p(\lambda) = 0$.

Was bedeutet das? Wir können Polynome in $\mathbb{C}[x]$ also Produkte von linearen Polynomen schreiben. Was kann man über Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ sagen? In $\mathbb{Q}$?

Beispiel 10.3.1. Wir betrachten $p(x) = x^4 - x^2 + 2$. Substitution mit $y = x^2$ liefert $p(y) = y^2 - y + 2$. Die Gleichung $y^2 - y + 2 = 0$ hat die Lösungen $y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-9}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-2}$, also $y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{-2}$, $y_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{-2}$.

Nun ist ja $x^2 = y$. Um zu x zu kommen, müssen wir noch die Quadratwurzel ziehen: Die Gleichung $x^4 - x^2 + 2 = 0$ hat die vier Nullstellen $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{-2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{-2}}$, $x_3 = i\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{-2}}$ und $x_4 = -i\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{-2}}$. Wenn wir jedoch in $\mathbb{R}$ arbeiten, hat sie nur die Nullstellen x_1 und x_2 . Und wenn wir in $\mathbb{Q}$ arbeiten, hat sie gar keine Nullstellen.

Kapitel 11. Die Exponentialfunktion

Die Euler'sche Zahl e ist definiert als

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

wobei $k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k$ ist und $0! = 1$. Damit definieren wir die Funktion $\tilde{e} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als $x \mapsto e^x$.

11.1. Erste Eigenschaften.

Definition 11.1.1. Die *Exponentialfunktion* ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Die Exponentialfunktion ist für reelle und komplexe Zahlen definiert!

Satz 11.1.2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = e^x.$$

Bevor wir das beweisen, ein Hilfsresultat:

Lemma 11.1.3. Es gilt für alle $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(s) \cdot \exp(t) = \exp(s+t).$$

Der Beweis verwendet den sogenannten binomischen Lehrsatz: Das ist die Formel $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}$, gilt auch für $x, y \in \mathbb{C}$). Dabei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der *Binomialkoeffizient*. Setzen Sie $n = 2$ ein und vergleichen Sie das Resultat mit den binomischen Formeln. Schauen Sie auch $n = 3$ an.

BEWEIS. Direktes Einsetzen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

$$\begin{aligned} \exp(s+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s+t}{n!} && \text{Definition von exp} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k t^{n-k} && \text{binom. Lehrsatz} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{s^k}{k!} \cdot \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} && n! \text{ kürzt sich weg} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \right) && \text{Produktregel für Reihen} \\ &= \exp(s) \cdot \exp(t) \end{aligned}$$

□

BEWEIS VON SATZ 11.1.2. Wir überprüfen die Aussage zuerst für natürliche Zahlen, dann für $\mathbb{Z}$, dann für $\mathbb{Q}$.

(a) Nach Definition ist $\exp(1) = e = e^1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
 \exp(n) &= \exp(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n \text{ Summanden}}) \\
 &= \exp(1 + (\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1 \text{ Summanden}})) \\
 &= \exp(1) \exp(\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1 \text{ Summanden}}) && \text{Lemma 11.1.3} \\
 &= \exp(1) \exp(1) \exp(\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2 \text{ Summanden}}) && \text{Lemma 11.1.3} \\
 &\vdots && \text{weiter Lemma 11.1.3 anwenden} \\
 &= \overbrace{\exp(1) \exp(1) \cdots \exp(1)}^{n \text{ Faktoren}} = e \cdot e \cdots e = e^n
 \end{aligned}$$

(b) $n = 0$: es gilt $\exp(0) = 1 = e^0$.

Für negative Zahlen: sei $n \in \mathbb{N}$, es ist

$$\begin{aligned}
 \exp(-n) \exp(n) &\stackrel{\text{Lm 11.1.3}}{=} \exp(-n+n) = \exp(0) = 1 \\
 \implies \exp(-n) &= \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.
 \end{aligned}$$

(c) Nun zu $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: es gilt einerseits

$$\begin{aligned}
 e^q = e^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{e^m} \\
 &= \sqrt[n]{\exp(m)} && \text{nach Teil (b).}
 \end{aligned}$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned}
 \exp\left(\frac{m}{n}\right)^n &= \overbrace{\exp\left(\frac{m}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{m}{n}\right)}^{n \text{ Faktoren}} \\
 &= \exp\left(\overbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}^{n \text{ Summanden}}\right) && \text{Lemma 11.1.3} \\
 &= \exp(m)
 \end{aligned}$$

Also hat man $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(m)} = \exp(q)$. Damit stimmen $\exp$ und $\tilde{e}$ überein für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Die Behauptung, dass $\tilde{e}$ und $\exp$ auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen folgt dann aus der Stetigkeit (Vorlesung Analysis). $\square$

[Vorlesung Fr, 19.9.2025]

Satz 11.1.4. Das Bild der Abbildung $\exp|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleich $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Zur Illustration dieses Satzes: e^x anschauen mit $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ - oder überlegen, wie der Graph von e^x aussieht, asymptotisch gegen $-\infty$, gegen $+\infty$.

Die sogenannte Euler'sche Formel ist die Gleichung in der folgenden Aussage:

Satz 11.1.5. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp ix = \cos(x) + i \sin(x).$$

Aus dem Satz 11.1.5 kann man die Reihendarstellungen für $\cos(x)$ und für $\sin(x)$ herleiten, indem wir $\exp(ix) = e^{ix}$ aufteilen (zur Erinnerung, die Exponentialfunktion ist definiert als $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, also $\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$). Und zwar separieren wir die Summanden mit geradem Exponenten von den Summanden mit ungeradem Exponenten:

$n = 2k$ gerade

$$(ix)^n = (-1)^k x^{2k}$$

$n = 2k + 1$ ungerade

$$i(ix)^n = i(-1)^k x^{2k+1}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) + i \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Da x reell ist, sind die Ausdrücke in den Klammern auch reell, d.h. wir haben

$$\operatorname{Re}(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x),$$

$$\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x).$$

Und ausgeschrieben:

$$(11.1) \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots,$$

$$(11.2) \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots.$$

Eine direkte Konsequenz von Satz 11.1.5 sind die folgenden Eigenschaften der Sinus-/ Cosinusfunktion:

Korollar 11.1.6. (1) $\cos$ ist gerade, d.h. $\cos(x) = \cos(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\sin$ ist ungerade, d.h. $\sin(x) = -\sin(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Setzen wir $x = \pi$ ein, so erhalten wir -1 :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

(4) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|e^{ix}| \stackrel{\text{Satz 11.1.5}}{=} \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1.$$

Wir erhalten dann $\{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Mit Satz 11.1.5 wissen wir, wie die Exponentialfunktion auf imaginären Zahlen (also Zahlen $ix, x \in \mathbb{R}$) wirkt: sie schickt sie auf den Einheitskreis. Mit Lemma 11.1.3 können wir allgemeiner verstehen, wie die Exponentialfunktion auf komplexen Zahlen wirkt, wir können jede komplexe Zahl $z = x + iy$ in Real- und Imaginärteil aufteilen und es ist dann $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$: der erste Term

ist positiv und reell, der zweite Term auf dem Einheitskreis. Dazu ein Beispiel (Beispiel 11.1.7), bevor wir in Korollar 11.1.8 das Bild von $\exp$ beschreiben.

Beispiel 11.1.7. Die Menge aller komplexen Zahlen $x + i\pi$ (mit $x \in \mathbb{R}$) wird auf die negative reelle Achse geschickt:

$$\{e^{x+i\pi} \mid x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\text{Lm 11.1.3}}{=} \{e^x \overbrace{e^{i\pi}}^{=-1} \mid x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\text{Kor 11.1.6}}{=} \{-e^x \mid x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\text{Satz 11.1.4}}{=} \mathbb{R}_{<0}.$$

Korollar 11.1.8. Das Bild von $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

BEWEIS. Wir zeigen, dass es zu jeder Zahl z in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine komplexe Zahl y gibt mit $e^y = z$.

Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir schreiben z in Polarform, $z = r \cdot e^{i\varphi}$ mit $\varphi, r \in \mathbb{R}$, wobei $r > 0$ (wieso?). Wir wählen ein $x \in \mathbb{R}$ mit $e^x = r$ (wieso können wir das?) und setzen $y := x + i\varphi$. Das hat die gewünschte Eigenschaft:

$$\exp(y) = e^{x+i\varphi} \stackrel{\text{Lm 11.1.3}}{=} e^x \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi} = z.$$

□

Satz 11.1.9. Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) &= e^{i(\varphi + \psi)} = e^{i\varphi} e^{i\psi} \\ &= (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi)) \\ &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + i(\cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)) \\ &\quad + i(\sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

Nimmt man die Realteile und die Imaginärteile zusammen, ergibt das dann wie gewünscht:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 11.1.10. (1) Wie kommen wir von der Form $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) auf die Polarkoordinaten von z ?

Gesucht sind $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, sodass $z = re^{i\varphi}$. Anschaulich, an Ebene: r ist der Abstand von z zum Nullpunkt, φ “der” Winkel, von der positiven reellen Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Ist $z = 0$, so hat man $r = 0$.

Sei also $z \neq 0$. Der Satz von Pythagoras liefert: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Einen passenden Winkel φ bestimmt man mittels Sinus/Cosinus am rechtwinkligen Dreieck. Sind etwa $a, b > 0$, so haben wir ein rechtwinkliges Dreieck vom Nullpunkt, mit rechtem Winkel an $a + 0 \cdot i$ (oder als $(a, 0)$ geschrieben) und mit dritter Ecke an $a + ib$ (oder als (a, b) geschrieben). Die Hypotenuse davon ist r und es gilt $\cos(\varphi) = \frac{a}{r}$ (alternativ: $\sin(\varphi) = \frac{b}{r}$). Mittels $\cos^{-1}$ (bzw. mittels $\sin^{-1}$) kann man $\varphi \in [0, 2\pi)$ finden mit $z = re^{i\varphi}$.

Die anderen Fälle ($a < 0$ mit $b > 0$, $a < 0$ mit $b < 0$, $a > 0$ mit $b < 0$) funktionieren analog, entsprechend als Seitenlängen am rechtwinkligen Dreieck $|a|$, $|b|$.

(2) Um von Polarkoordinaten auf die Form $z = a + ib \neq 0$ zu kommen, lautet die Formel:

$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

Beispiel 11.1.11. Zurück zu Beispiel 10.2.2 (2): Wir hatten dort die komplexen Zahlen $2 + i$ und $2 - i$.

Wir schauen uns diese nun in Polarform an:

Es sei $z_1 = 2 + i$. In Polarform: $z_1 = re^{i\varphi_1}$, $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, φ_1 ist ungefähr 26.57.

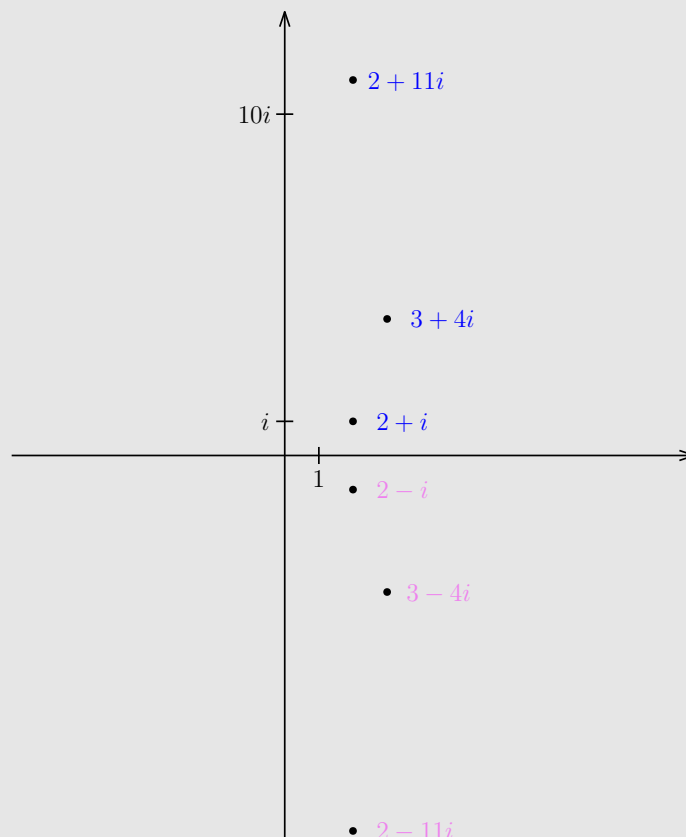
Wir betrachten z_1^2 , es ist $z_1^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$.

In Polarform: $z_1^2 = \sqrt{9 + 16}e^{2i\varphi_1}$, also ist hier der Abstand zu 0 gerade $5 = r_1^2$ und der Winkel ist $2\varphi_1 \approx 53.13$.

Und zuletzt $z_1^3 = (2 + i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 i - 3 \cdot 2 - i = 2 + 11i$.

In Polarform: $z_1^3 = \sqrt[3]{4 + 12i}e^{3i\varphi_1}$, der Abstand zum Nullpunkt ist $\sqrt[3]{5} = r_1^3$ und der Winkel ist $3\varphi_1 \approx 79.7$.

Analog für $2 - i$. Die komplexen Zahlen $2 \pm i$ und ihre 2. und 3. Potenz sind in der Abbildung eingezeichnet. Wo wäre ungefähr z_1^4 ?



Kapitel 12. Die Ableitung

12.1. Polynome, Exponentialfunktion. Wir schreiben $f'(x)$ für die Ableitung von $f(x)$, $f''(x)$ für die zweite Ableitung, $f'''(x)$ für die dritte Ableitung und allgemeiner $f^{(k)}(x)$ für die k -te Ableitung.

Beispiel 12.1.1. (1) Das Polynom $f(x) = x^n$ hat die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f^{(n)}(x) &= n! \quad \text{ein konstantes Polynom.} \end{aligned}$$

Wie sieht $f^{(n+1)}(x)$ aus?

(2) Die Ableitung der Funktion $\exp$ ist die Funktion selbst: Für $f(x) := \exp(x)$ ist

$$f'(x) = \exp(x) = f(x).$$

Herleitung der Ableitung von $\exp(x)$:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} \quad \text{der Summand von } n=0 \text{ fällt weg, da } (x^0)' = 0 \text{ ist} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x). \end{aligned}$$

(*) nach Beispiel 12.1.1(1)

12.2. Ableitungsregeln. [Vorlesung Mo, 22.9.2025]

Es seien f, g "differenzierbare" Funktionen. Die folgenden Regeln sind sehr nützlich:

- Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Kettenregel: $(f(g(x)))' = (f'(g(x))) \cdot g'(x)$.

BEMERKUNG 12.2.1. Ableitung - Steigung, was bedeutet "differenzierbar"?

Beispiel 12.2.2. Wir betrachten die Funktion $x \mapsto e^{ix}$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und leiten sie mit den Regeln ab.

$$\begin{aligned} (e^{ix})' &= i \cdot e^{ix} && \text{Kettenregel und Abl. von } e^x, \text{ Bsp 12.1.1(2)} \\ &= i \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i \sin(x))' &= \cos(x)' + (i \sin(x))' \\ &= -\sin(x) + i \cos(x) \quad \text{siehe Bsp 12.2.3 (3)} \end{aligned}$$

Für die Herleitung der Ableitungen von Sinus und Cosinus kann man die Reihendarstellungen (11.2) und (11.1) verwenden. Jeder Summand von $\sin(x)$ (von $\cos(x)$) ist ein Polynom, wir

leiten sie alle ab, damit erreichen wir grad $\cos(x)$ (wenn wir $\sin(x)$ ableiten) bzw. $-\sin(x)$ (wenn wir $\cos(x)$ ableiten):

$$\begin{array}{rcl}
 \sin(x) & = & 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\
 \uparrow \text{Ableiten} & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \cos(x) & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots, \\
 \uparrow \text{Ableiten} & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \sin(x) & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots
 \end{array}$$

Beispiele 12.2.3. Welche Regeln sind anzuwenden? (Definitionsbereiche: anpassen bei Umkehrfunktion).

- (1) $f(x) = x^7$ hat Ableitung $f'(x) = 7x^6$.
- (2) Es sei $g(z) = \frac{1}{z^3}$. Die Ableitung ist $g'(x) = \frac{-3}{z^4}$.
- (3) $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ (mit den Darstellungen (11.1), (11.2)).
- (4) $f(x) := e^{x^2}$ hat die Ableitung $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.
- (5) $\ln'(|x|) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ (siehe Bemerkung 12.2.4).
- (6) $f(x) := \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- (7) $f(x) := \arctan(x)$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. ($\arctan$ ist die Umkehrfunktion von $\tan$).

BEMERKUNG 12.2.4. Wie bestimmt man die Ableitung der Umkehrfunktion? Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, die eine Umkehrfunktion $g : Y \rightarrow X$ besitzt (übliche Schreibweise: f^{-1} für die Umkehrfunktion), dann ist $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in X$ und $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in Y$.

Für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned}
 x &= g(f(x)) && \text{beide Seiten ableiten} \\
 \Rightarrow 1 &= g' \cdot f(x) \cdot f'(x) && \text{rechts mit der Kettenregel} \\
 &= g'(y) \cdot f'(g(y)) && \text{für } y := f(x), \text{ bzw. } x = g(y) \\
 \Rightarrow g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))}
 \end{aligned}$$

Oder, mit der Schreibweise f^{-1} für die Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Siehe Beispiel 12.2.3(5): Sei $x > 0$. Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (und diese ist streng monoton, differenzierbar, mit $\exp' = \exp$), $\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Für Beispiel 12.2.3(7): Der Tangens hat für die Eindeutigkeit den Wertebereich $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und den Bildbereich $\mathbb{R}$. Entsprechend ist (für die Eindeutigkeit) der Arcustangens eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(Als Notation: wenn eine Funktion jedem x das Element x selbst x zuordnet, so sagen wir, sie sei die *Identitätsabbildung* und schreiben wir für diese Abbildung id oder id_X (wenn wir die Menge angeben wollen, in der die x liegen).

12.3. Extremwertprobleme. Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein *lokales Maximum* von f , falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x “in der Nähe von x_0 : In einer Umgebung von x_0 nimmt $f(x)$ keinen grösseren Wert als $f(x_0)$ an. Analog sind lokale Minima definiert.

Ist ein Punkt x ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum von f , so gilt $f'(x) = 0$. Dies ist ein *notwendiges* Kriterium für lokale Maxima/Minima.

Ein *hinreichendes* Kriterium für ein lokales Maximum (bzw. für ein lokales Minimum) ist folgendes: Es gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$).

Kapitel 13. Integration

Man unterscheidet die Begriffe *bestimmtes* und *unbestimmtes* Integral. Das *bestimmte Integral* beschreibt die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$, in gegebenen Grenzen, also etwa $\int_a^b f(x)dx$.

Das *unbestimmte Integral* beschreibt die Stammfunktion von f , also eine Funktion F , für die gilt $F' = f$. Sie ist eindeutig bis auf eine Konstante, die beim Ableiten wegfällt.

13.1. Erste Eigenschaften, Regeln und Beispiele.

Satz 13.1.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Ist F eine Stammfunktion von f , d.h. $f = F'$, so gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Zwei nützliche Integrationsregeln sind die partielle Integration und die Substitutionsregel.

[Vorlesung Di, 23.9.2025]

BEMERKUNG 13.1.2. Partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Die Regel für die partielle Integration leitet sich aus der Produktregel für Ableitungen ab und der Eigenschaft von Stammfunktionen (i.e. dass $F' = f$ gilt). Ein Beispiel zur Illustration: $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Kandidaten für u , v' sind $v'(x) = x$ und $u(x) = \ln(x)$. Dann ist $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ (ohne Konstante) und $u'(x) = \frac{1}{x}$. Mit der Formel der partiellen Integration gibt das:

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln(x) \cdot x dx &= [\ln(x) \frac{1}{2}x^2]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} (\frac{1}{2}x^2) dx \\ &= (\frac{1}{2}b^2) \ln(b) - (\frac{1}{2}a^2) \ln(a) - \int_a^b \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}(b^2 \ln(b) - a^2 \ln(a)) - [\frac{1}{4}x^2]_a^b \end{aligned}$$

BEMERKUNG 13.1.3. Substitutionsregel (Umkehrung der Kettenregel)

Es sei $\varphi : [a, b] \rightarrow [a', b']$ eine Funktion mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ (eine stetige Funktion). Dann gilt

$$(13.1) \quad \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Beispiele 13.1.4. Für die ersten beiden Beispiele verwenden wir 12.2.3 (3).

- (1) $\int_0^\pi \cos(x)dx = \sin(\pi) - \sin(0) = 0$.
- (2) $\int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$.
- (3) $\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

Das kann man mit Hilfe der partiellen Integration sehen: Wir wählen $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = \cos(x)$, also $v(x) = \sin(x)$, $u'(x) = -\sin(x)$. Das gibt:

$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = [\cos(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)dx.$$

Das Integral rechts lösen wir nun anders: wir ersetzen $\sin^2(x)$ durch $1 - \cos^2(x)$, also haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^2(x) dx &= [\cos(x) \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-1 + \cos^2(x)) dx \\ &= [\cos(x) \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-1) dx - \int_0^\pi \cos^2(x) dx \\ &= [\cos(x) \sin(x)]_0^\pi + [x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos^2(x) dx\end{aligned}$$

Wir addieren $\int_0^\pi \cos^2(x) dx$ rechts und links,

$$\begin{aligned}2 \int_0^\pi \cos^2(x) dx &= [\cos(x) \sin(x)]_0^\pi + [x]_0^\pi \\ &= \underbrace{\cos(\pi) \sin(\pi)}_{-1} \underbrace{- \cos(0) \sin(0)}_{=0} + \underbrace{\pi - 0}_{=0} = \pi.\end{aligned}$$

Damit ist $\int_0^\pi \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

$$(4) \int_a^b \frac{1}{x-5} dx = [\log(x-5)]_a^b = \log(b-5) - \log(a-5).$$

Das kann man mit der Substitutionsregel sehen: Es sei $\varphi(x) = x - 5$, das ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, wir brauchen aber nur die Intervallsgrenzen: $\varphi : [a, b] \rightarrow [a-5, b-5]$, $x \mapsto x - 5$. Die Funktion f ist $f(x) = \frac{1}{x}$. Es ist $f(\varphi(x)) = \frac{1}{x-5}$, sowie $\varphi'(x) = 1$. D.h. $f(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{x}$. Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{x-5} dx \stackrel{(13.1)}{=} \int_{a-5}^{b-5} \frac{1}{t} dt = \int_{a-5}^{b-5} f(t) dt \\ &= [\ln(t)]_{a-5}^{b-5} = \ln(b-5) - \ln(a-5).\end{aligned}$$

$$(5) \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) - \arctan(a), \text{ mit Beispiel 12.2.3(7).}$$

Kapitel 14. Lineare Algebra und Vektorrechnung

Wir beginnen mit linearen Gleichungssystemen und definieren dazu Matrizen.

14.1. Matrizen. Matrizen können gebraucht werden, um lineare Gleichungssysteme kompakt zu schreiben.

Beispiel 14.1.1. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen der Matrix links werden mit der Spalte $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ “verrechnet”.

Wir definieren das Produkt von zwei Matrizen A und B - dazu muss die Anzahl der Spalten der ersten Matrix (der Matrix A) gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix B sein, sonst ist die Multiplikation nicht möglich.

Wir sagen, dass A eine $n \times m$ -Matrix ist, falls sie aus n Zeilen und m Spalten besteht:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die a_{ij} in einer festgelegten “Koeffizientenmenge”, z.B. in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$.

Definition 14.1.2. Es sei A eine $n \times m$ -Matrix und B eine $m \times \ell$ -Matrix, sowie sei v ein Spaltenvektor mit m Einträgen. Die Einträge von A, B, v seien alle aus $\mathbb{R}$ oder alle aus $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ell} \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Wir definieren das Produkt $A \cdot B$ als die folgende $n \times \ell$ -Matrix:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\ell} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2\ell} \\ \cdots & & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n\ell} \end{pmatrix},$$

wobei $c_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ ist. Analog ist $A \cdot v = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}$, wobei $w_i := \sum_{k=1}^m a_{ik} v_k$ ist.

Beispiele 14.1.3. (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Definition 14.1.4. (1) Die *Determinante* einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist definiert als $\det A := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(2) Die *Determinante* einer 3×3 -Matrix $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\det B := b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}.$$

$\det B :$

wobei $*_1 = -b_{13}b_{22}b_{31}$, $*_2 = -b_{11}b_{23}b_{32}$, $*_3 = -b_{12}b_{21}b_{33}$ ist, $*_4 = b_{11}b_{22}b_{33}$, $*_5 = b_{12}b_{23}b_{31}$ und $*_6 = b_{13}b_{21}b_{32}$.

Alternative Berechnung der Determinante von B mit Zeilenentwicklung...

Beispiel 14.1.5. Wir schreiben I_n für die $n \times n$ -Matrix, die 1en auf der Diagonalen hat und sonst überall 0en. Sie heisst die *n-te Einheitsmatrix*.

- Es gilt $\det(I_2) = 1$ und $\det(I_3) = 1$.
- Ist B eine $m \times n$ -Matrix so gilt $I_m \cdot B = B$ und $B \cdot I_n = B$. Das soll man sich mit der Definition der Matrizenmultiplikation (Definition 14.1.2) überlegen.

[Vorlesung Mi, 24.9.2025]

14.2. Vektoren, lineare Abhängigkeit. Wir betrachten Vektoren mit Einträgen in $\mathbb{R}$ (man könnte auch $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ oder andere Koeffizienten nehmen). Wir betrachten hier meistens Vektoren im

$\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$, also etwa $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1, v_2)^\top$ oder $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, wobei die Einträge

v_1, v_2, u_1, u_2, u_3 in $\mathbb{R}$ sind.

Allgemeiner sind Vektoren n -Tupel im $\mathbb{R}^n$ (oder im $\mathbb{C}^n$ oder in $\mathbb{Q}^n$), etwa $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$. Wir können Vektoren addieren, subtrahieren und mit Skalaren multiplizieren (Strecken oder kürzer machen). Mit diesen Operationen bilden die Vektoren einen sogenannten "Vektorraum". Für die folgende Definition betrachtet man am besten $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ zur Illustration.

Definition 14.2.1. Es sei $V := \mathbb{R}^n$. (Eigentlich: es sei V eine Menge von Vektoren $(v_1, \dots, v_n)^\top$ mit $v_i \in \mathbb{R}$).

(1) Wir haben zwei Operationen: die *komponentenweise* Addition $\oplus$ von Vektoren und die Multiplikation von Skalaren (Elementen von $\mathbb{R}$) mit Vektoren. Sind $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$ und $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$ zwei Vektoren und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)^\top \quad \text{und} \quad \lambda \odot \mathbf{u} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2, \dots, \lambda \cdot u_n)^\top.$$

(2) Die Menge V mit $\oplus$ und $\odot$ ist ein *Vektorraum über $\mathbb{R}$* (oder ein *$\mathbb{R}$ -Vektorraum*), wenn für alle Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Vektoraddition:

(V1) $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$ (Assoziativgesetz).

(V2) Es existiert ein neutrales Element $\mathbf{0}_V \in V$ mit $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(V3) Es existiert zu $\mathbf{u}$ ein inverses Element $-\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) \oplus \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$.

(V4) Es gilt $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ (Kommutativgesetz).

Skalarmultiplikation:

(S1) $\lambda \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\lambda \odot \mathbf{u}) \oplus (\lambda \odot \mathbf{v})$.

(S2) $(\lambda + \mu) \odot \mathbf{u} = (\lambda \odot \mathbf{u}) \oplus (\mu \odot \mathbf{u})$.

(S3) $(\lambda \cdot \mu) \odot \mathbf{u} = \lambda \odot (\mu \odot \mathbf{u})$.

(S4) $1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für das Einselement $1 \in \mathbb{R}$.

In der Praxis schreibt man einfach $+$ für die Vektoraddition und $\cdot$ für die Multiplikation von einem Skalar mit einem Vektor.

BEMERKUNG 14.2.2. (1) Zwei Vektoren (verschieden vom Nullvektor) im $\mathbb{R}^2$ können ganz $\mathbb{R}^2$ aufspannen oder eine Gerade. Wenn einer der beiden ein Vielfaches vom anderen ist, spannen sie nur eine Gerade auf.

(2) Drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (verschieden vom Nullvektor) in $\mathbb{R}^3$ können ganz $\mathbb{R}^3$ aufspannen oder eine Ebene oder eine Gerade. Ist einer der Vektoren eine “Linearkombination” der anderen beiden (etwa $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ für gewisse λ, μ in $\mathbb{R}$), spannen sie nicht ganz $\mathbb{R}^3$ auf, sondern höchstens eine Ebene. Sind alle drei Vektoren kollinear, so spannen sie nur eine Gerade auf.

Definition 14.2.3. (1) Zwei Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ und $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$ in $\mathbb{R}^2$ heißen *linear unabhängig*, falls sie $\mathbb{R}^2$ aufspannen. Andernfalls heißen sie *linear abhängig* (in anderen Worten: sie sind kollinear).

(2) Drei Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^\top$ in $\mathbb{R}^3$ heißen *linear unabhängig*, falls sie $\mathbb{R}^3$ aufspannen. Ansonsten heißen die drei Vektoren *linear abhängig*.

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}^\top$ in $\mathbb{R}^3$ heißen *linear unabhängig*, falls sie eine Ebene aufspannen, die den Nullvektor enthält. Ansonsten heißen die zwei Vektoren *linear abhängig*.

BEMERKUNG 14.2.4. (1) Zwei Vektoren $\mathbf{u}^\top$ und $\mathbf{v}^\top$ sind linear unabhängig $\iff$ die Determinante der aus $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gebildeten Matrix nicht 0 ist, i.e.

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(2) Drei Vektoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^\top$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig $\iff$ die Determinante der aus $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ gebildeten Matrix ist nicht 0 ist, d.h.

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beispiel 14.2.5. (1) Die Koordinatenvektoren $(1,0)^\top$ und $(0,1)^\top$ im $\mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig. Genauso die Koordinatenvektoren $(1,0,0)^\top$, $(0,1,0)^\top$, $(0,0,1)^\top$ im $\mathbb{R}^3$. Was sind die Determinanten hier?

(2) Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\mathbf{u} = (1, 0, -2)^\top, \mathbf{v} = (2, 1, 0)^\top, \mathbf{w} = (3, 1, -2)^\top$$

(3) Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$\mathbf{a} = (1, 1, -2)^\top, \mathbf{b} = (0, 2, 0)^\top, \mathbf{c} = (3, 1, -2)^\top$$

Man kann die lineare Abhängigkeit allgemeiner definieren, für beliebig viele Vektoren im $\mathbb{R}^m$:

Definition 14.2.6. Eine Menge von Vektoren $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ heisst *linear unabhängig*, falls für alle m -Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ von reellen Zahlen gilt: ist

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{w}_m = 0,$$

so gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

(Anders gesagt: die m Vektoren sind linear abhängig, falls man $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ findet, die nicht alle gleich 0 sind, so dass $\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{w}_m = 0$ gilt.

14.3. Inverse von 2×2 -Matrizen. [\[Vorlesung Do, 25.9.2025\]](#)

BEMERKUNG 14.3.1. Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Angenommen, es existiert eine weitere 2×2 -Matrix C mit der Eigenschaft, dass $C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Dann hat das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Wieso ist das so? Man rechnet $A \cdot x = \text{id} \cdot x = C \cdot A \cdot x = C \cdot v \dots$

Man nennt die Matrix $A^{-1} := C$ die *Inverse* zu A . Diese lässt sich mit der Determinante berechnen: Falls die Determinante $\det B$ einer 2×2 -Matrix $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ verschieden von Null

ist, so ist $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$.

Man überprüft:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} & -b_{11}b_{12} + b_{12}b_{11} \\ b_{21}b_{22} - b_{22}b_{21} & -b_{21}b_{21} + b_{22}b_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \det B & 0 \\ 0 & \det B \end{pmatrix} \\ &= \det B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wenn man also für B^{-1} noch den Faktor $\frac{1}{\det B}$ vor $\begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$ setzt, ergibt sich die Einheitsmatrix I_2 . (Als Übung kann man $B^{-1} \cdot B$ rechnen, das sollte auch I_2 sein).

Beispiel 14.3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$