

Präsenzblatt 5

1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

- $z_1 = (2 + 3i)(5 + \sqrt{2}i)$
- $z_2 = (2 + 3i)^2$
- $z_3 = \overline{z_2}^2$
- $z_4 = (3 + 4i)(3 - 4i)$
- $z_5 = \frac{i-5}{3+5i}$
- $z_6 = \frac{4+5i}{2-i} - \frac{1-3i}{1+i}$.

2. Sei

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(a) Bestimmen Sie den Betrag von j und zeichnen Sie j in der Gaußschen Zahlenebene ein.

(b) Berechnen Sie

$$j^2, \quad j^3, \quad 1 + j + j^2, \quad \frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}.$$

(c) Zeichnen Sie j^2 und j^3 in die Gaußsche Zahlenebene zusammen mit j ein. Was erkennen Sie in dieser Zeichnung?

3. Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{iz}{z+i}.$$

(a) Bestimmen Sie die komplexe Zahl z_0 , so dass $1 + 2i$ das Bild von z_0 bzgl. f ist.

(b) Zeichnen Sie die komplexen Zahlen z in die Gaußsche Zahlenebene ein, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$|f(z) - i| = \sqrt{2}.$$