Präsenzblatt 4

1. Sei (u_n) die Folge definiert durch

$$2u_n + u_{n-1} = 1 \quad \text{und} \quad u_0 = 2.$$

Sei (v_n) die Folge definiert durch $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

   (a) Zeigen Sie, dass (v_n) eine geometrische Folge ist.

   (b) Bestimmen Sie v_n bzgl. n und folgern Sie u_n bzgl. n.

   (c) Berechnen Sie die Summen

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{und} \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und, für den Fall dass er existiert, den Limes der folgenden Folgen.

   - $u_n = \frac{2n-1}{n}$
   - $u_n = 5 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
   - $\frac{n \sin(n\frac{\pi}{6})}{n^2+1}$.

3. Sei (u_n) die Folge definiert durch

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

   (a) Zeigen Sie $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

   (b) Zeigen Sie $u_n < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ für alle $n \geq 2$.

   (c) Zeigen Sie $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{2}$ für alle $n \geq 2$.

   (d) Folgern Sie, dass (u_n) eine Nullfolge ist.

4. Sei (u_n) definiert durch

$$u_1 = 2 \quad \text{und} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 1.$$

   (a) Bestimmen Sie die reelle Zahl α, so dass die Folge (v_n) mit $v_n = u_n + \alpha$ geometrisch ist.

   (b) Folgern Sie eine Formel für u_n bzgl. n.

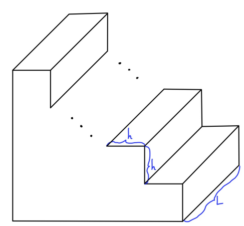
   (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und die Konvergenz der Folge (u_n).

(d) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Geraden

$$g_1 : y = \frac{1}{4}x \quad \text{und} \quad g_2 : y = x.$$

- Was ist die y-Koordinate des Punktes p_1 auf der Geraden g_1, der als x-Koordinate den Wert v_n besitzt?
- Was ist die x-Koordinate des Punktes p_2 der Geraden g_2, der als y-Koordinate den Wert v_{n+1} besitzt?
- Folgern Sie eine Konstruktion dieser Punkte mit x-Koordinaten v_2, v_3, v_4.
- Welcher Punkt entspricht der x-Koordinate $l = \lim_{n\to\infty} v_n$?

5. Wir betrachten eine Treppe mit N gleich großen Stufen. Jede Stufe besitzt Höhe und Tiefe h. Die Breite der Treppe beträgt L.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ fließt Wasser mit einer konstanten Durchflussmenge G über die unterste Stufe. Sei t_n die notwendige Zeit, damit die n-te Stufe überflutet wird.

(a) Zeigen Sie $t_{n+1} = t_n + (n+1)\frac{h^2 L}{G}$.

(b) Bestimmen Sie t_n bzgl. n. Wie lange dauert es, bis die Treppe vollständig überflutet ist?

(c) Untersuchen Sie was passiert, wenn h gegen 0 strebt.