M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Klausur zur Linearen Algebra I
—Lösungen—

Aufgabe 1 (25 Punkte). (i) Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Teilmenge. Wann ist U eine Untergruppe von G?

(ii) Was besagt der Basisaustauschsatz?

(iii) Formulieren Sie die Dimensionsformel für Unterräume.

(iv) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen und $B \subseteq Y$ eine Teilmenge. Definieren Sie $f^{-1}(B)$.

(v) Wie lautet die Leibniz-Formel für die Determinante?

Lösung. (i) Die Verknüpfung von G werde mit $*$ bezeichnet, das neutrale Element mit e und das Inverse eines Elements $x \in U$ mit x^{-1}. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ ist eine Untergruppe, wenn folgende Axiome gelten:

(a) $e \in U$,

(b) $x * y \in U$ für alle $x, y \in U$ und

(c) $x^{-1} \in U$ für alle $x \in U$.

(ii) Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und sei $(w_1, \ldots, w_k)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus V. Dann ist $k \leq n$ und es gibt eine $(n-k)$-elementige Teilmenge $J = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ von $\{1, \ldots, n\}$, so daß $(w_1, \ldots, w_k, v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}})$ eine Basis von V ist.

(iii) Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei endlich-dimensionale Unterräume. Dann gilt $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

(iv) $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(v) Sei $A = (a_{i,j}) \in M_{n \times n}(K)$. Dann ist $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$.

Aufgabe 2 (15 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto |2x|$.

(ii) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.

(iii) $h : X \to \mathscr{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ für eine nichtleere Menge X.

Lösung. (i) f ist nicht injektiv, denn $f(1) = 2 = f(-1)$. Da $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ gerade ist, ist f auch nicht surjektiv.

(ii) Identifiziert man $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^2$, so ist $g = l_A$, wobei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist. Da $\det A = 1 \neq 0$ ist, ist A invertierbar und somit g bijektiv.

(iii) h ist injektiv, denn ist $h(x) = h(x')$, so folgt $\{x\} = \{x'\}$ und das bedeutet $x = x'$. Allerdings ist h nicht surjektiv, denn $\emptyset \notin h(X)$.

Aufgabe 3 (15 Punkte). Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$A_x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & 0 & x \\ x & x & x^2-2x \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von A_x in Abhängigkeit von x. Berechnen Sie ferner für alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\operatorname{Rang} A_x = 3$ ist, die inverse Matrix A_x^{-1}.

Lösung. Durch Laplace-Entwicklung erhält man $\det(A_x) = x^2(x-1)$. Das bedeutet $\operatorname{Rang}(A_x) = 3$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Wir betrachten A_0 und A_1:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A_0 ist bereits in Zeilenstufenform; wir lesen $\operatorname{Rang}(A_0) = 1$ ab. Durch Zeilenumformungen erhalten wir $\operatorname{Rang}(A_1) = 2$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ergibt sich

$$A_x^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x-1} & -\frac{1}{x} & \frac{1}{x(x-1)} \\ 1 & \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x-1} & 0 & \frac{1}{x(x-1)} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (15 Punkte). In $\mathbb{R}^4$ seien

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{lllll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & =0 \\ x_1 & & & -x_4 & =0 \end{array} \right\}.$$

Bestimmen Sie Basen von U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Lösung. Indem man z.B. x_1 und x_2 als freie Variablen wählt, erhält man die Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von U_2. Da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ist, liegt $(0,1,3,0)^T \in U_1 \cap U_2$. Wir sehen allerdings sofort, daß $(1,1,0,0)^T \notin U_2$ ist. Damit ist

$$U_1 \cap U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Summe $U_1 + U_2$ ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allerdings ist nach der Dimensionsformel $\dim(U_1 + U_2) = 3$. Aus der Gleichung (1) lesen wir ab, daß wir, z.B., den Vektor $(0, 1, 3, 0)^T$ eliminieren können. Damit erhalten wir eine Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $U_1 + U_2$.

Aufgabe 5 (15 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y \\ 2x - y \\ -5x + 3y \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f)$.

Lösung. (i) Die Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasen ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Da die beiden Vektoren aus $\mathbf{B}$ von 0 verschieden sind und kein Vielfaches des jeweils anderen, ist $\mathbf{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Um zu sehen, daß $\mathbf{C}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b + c \end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich $a = 0$, $b = 0$ und $b + c = 0$, und durch Einsetzen schließlich $c = 0$.

Nun bestimmen wir

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$M_{\mathbf{B},\mathbf{C}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (15 Punkte). Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = 0$. Beweisen Sie:

(i) $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$,

(ii) $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$ genau dann, wenn $\dim V = 2 \dim \mathrm{Kern}(f)$.

Lösung. (i) Sei $w \in \mathrm{Bild}(f)$. Es gibt ein $v \in V$ mit $w = f(v)$. Dann ist $f(w) = f(f(v)) = 0$, also $w \in \mathrm{Kern}(f)$.

(ii) Es gelte $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist $\dim V = \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f) = 2 \dim \mathrm{Kern}(f)$.

Umgekehrt nehmen wir $\dim V = 2 \dim \mathrm{Kern}(f)$ an. Dann gilt, wiederum nach der Dimensionsformel, $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Kern}(f)$. Aber nach (i) ist $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Kern}(f)$. Beide sind (endlich-dimensional und) von der gleichen Dimension. Also muß schon $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$ gelten.