M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Lösungen zu Blatt 12—

Aufgabe* 1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Sei $U \subseteq W$ ein Unterraum. Zeige

$$\dim f^{-1}(U) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap U).$$

Lösung. Wende den Rangsatz auf die Abbildung $g : f^{-1}(U) \to U$ definiert durch $g(v) = f(v)$ an. Es gilt $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Bild}(f) \cap U$.

Aufgabe* 2. Für welche reellen Zahlen x gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\x\end{pmatrix}, \quad \text{und } f\begin{pmatrix}x+1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}?$$

Lösung. Es gibt kein solches x, denn

$$f\begin{pmatrix}x+1\\2\end{pmatrix} = \frac{x-1}{2} f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$