M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Lösungen zu Blatt 9—

Aufgabe* 1. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines K-Vektorraums V.

(i) Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ ist oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(ii) Stets gilt $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

(iii) Gib ein Beispiel mit $U_1 \cap (U_2 + U_3) \not\subseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$.

(iv) Falls $U_2 \subseteq U_1$, so gilt: $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_2 + (U_1 \cap U_3)$.

Lösung. (i) Die Hinrichtung ist die interessante. Sei $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum und nehme ohne Einschränkung $U_1 \not\subseteq U_2$ an. Es gibt also ein $x \in U_1 \setminus U_2$. Wir zeigen $U_2 \subseteq U_1$. Sei $y \in U_2$. Dann ist $x - y \in U_1 \cup U_2$ (denn das ist ein Unterraum). Wäre $x - y \in U_2$, so wäre auch $x = (x - y) + y \in U_2$. Deshalb muß $x - y \in U_1$ sein. Dann ist aber auch $y = x - (x - y) \in U_1$.

(ii) Einfach.

(iii) $U_1 = \langle e_1 + e_2 \rangle$, $U_2 = \langle e_1 \rangle$ und $U_3 = \langle e_2 \rangle$.

(iv) Auch einfach.

Aufgabe* 2. Sei G eine endliche Gruppe mit Verknüpfung $*$ und neutralem Element e. Es gelte $x * x = e$ für jedes $x \in G$. Zeige, daß es eine natürliche Zahl n mit $|G| = 2^n$ gibt.
Hinweise: Zeige zuerst, daß G abelsch ist. Definiere dann eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraumstruktur auf G und argumentiere mit dem Basisexistenzsatz.

Lösung. Da $x * y = (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} = y * x$ gilt (für alle $x, y \in G$) ist G abelsch. Wir definieren die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraumstruktur auf G wie folgt: die Addition dieses Vektorraums ist $*$ und die skalare Multiplikation ist erklärt durch

$$0 \cdot x = e$$
$$1 \cdot x = x$$

für alle $x \in G$. Das ist tatsächlich ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum. Um das zu zeigen prüft man die Vektorraumaxiome. Alle davon sind offensichtlich, bis auf das Distributivgesetz "$(a + b)x = ax + bx$". Der relevante Fall ist $a = b = 1$. Dort ist $(a+b)x = 0 \cdot x = e$ und $ax + bx = x * x = e$ (nach Voraussetzung).

Als $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum ist G endlich erzeugt, denn G ist als endlich vorausgesetzt. Nach Basisexistenzsatz besitzt G eine Basis als $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum; nennen wir sie $(x_1, \ldots, x_n)$. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Abbildung

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \to G, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

bijektiv. Damit besitzen G und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gleich viele Elemente. Es folgt also $|G| = |(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n| = 2^n$.