M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Lösungen zu Blatt 4—

Aufgabe* 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Bezeichne die Quotientenabbildung bezüglich $\sim$ mit $q : X \to X/{\sim}$. Zeige, daß es genau dann eine Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ mit $f = \overline{f} \circ q$ gibt, wenn für alle $x, x' \in X$ mit $x \sim x'$ schon $f(x) = f(x')$ gilt.

Lösung. Wir nehmen an, es gebe eine Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ mit $f = \overline{f} \circ q$. Seien $x, x' \in X$ mit $x \sim x'$. Dann gilt aber $q(x) = [x] = [x'] = q(x')$ und deshalb

$$f(x) = (\overline{f} \circ q)(x) = \overline{f}(q(x)) = \overline{f}(q(x')) = (\overline{f} \circ q)(x') = f(x').$$

Das zeigt eine Richtung der Behauptung.

Umgekehrt setzen wir voraus, daß für alle $x, x' \in X$ mit $x \sim x'$ schon $f(x) = f(x')$ gilt. Wir definieren die Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ durch $\overline{f}([x]) = f(x)$. Warum ist das wohldefiniert? Für zwei Elemente $x, x' \in X$ mit $[x] = [x']$ gilt $x \sim x'$, was nach Voraussetzung $f(x) = f(x')$ impliziert. Deshalb ist $\overline{f}([x])$ unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten von $[x]$ und f somit wohldefiniert. Schließlich gilt

$$(\overline{f} \circ q)(x) = \overline{f}(q(x)) = \overline{f}([x]) = f(x)$$

und daher $\overline{f} \circ q = f$.

Aufgabe* 2. Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. Die Relation $\sim$ auf X sei wie folgt erkärt: Für reelle Zahlen x, y, x', y' mit $(x, y) \neq (0, 0) \neq (x', y')$ gelte $(x, y) \sim (x', y')$, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$ so gibt, daß

$$\begin{aligned} x' &= tx \text{ und} \\ y' &= ty \end{aligned}$$

sind.

(i) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(ii) Bezeichne die Äquivalenzklasse von $(x, y) \in X$ bezüglich $\sim$ mit $[x : y]$. Zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \to X/{\sim}$, die definiert ist durch $f(x) = [x : 1]$ injektiv ist. Welche Elemente von $X/{\sim}$ liegen nicht in $f(\mathbb{R})$?

Lösung. (i) Einfach.

(ii) Wir bestimmen hier nur $(X/{\sim}) \setminus f(\mathbb{R})$ (zu zeigen, daß f injektiv ist, ist leicht). Die Äquivalenzklasse $[1 : 0]$ liegt nicht in $f(\mathbb{R})$, denn sonst gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $(1, 0) \sim (x, 1)$, sprich es müßte eine relle Zahl $t \neq 0$ mit $x = t \cdot 1$ und $1 = t \cdot 0$ geben. Das ist offensichtlich Unsinn. Seien umgekehrt $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$. Dann ist $(x, y) \sim (x/y, 1)$, oder mit anderen Worten $[x : y] = [x/y : 1] = f(x/y)$. Also muß für ein Paar $(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ mit $[x : y] \notin f(\mathbb{R})$ schon $y = 0$ gelten. Dann ist aber $x \neq 0$, und damit $(x, y) = (x, 0) \sim (1, 0)$. Wir haben somit gezeigt, daß

$$(X/{\sim}) \setminus f(\mathbb{R}) = \{[1 : 0]\}$$

ist.