

Übungen zur Linearen Algebra I — Lösungen zu Blatt 10 —

Aufgabe* 1. Bestimme die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme über \mathbb{Q} :

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Lösung. (i)

$$L(A, b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(ii) Die erste und die letzte Zeile der Matrix sind gleich. Deshalb ist das LGS nur lösbar, wenn $\alpha = 7$ ist. In dem Fall ist die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe* 2. Bringe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

auf Zeilenstufenform für

(i) $K = \mathbb{Q}$ bzw. für

(ii) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Lösung. (i) $K = \mathbb{Q}$: Eine Zeilenstufenform ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: Dort ist eine Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$