M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Lösungen zu Blatt 3—

Aufgabe* 1. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ seien $f_* : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ und $f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ die Abbildungen definiert durch $f_*(X') = f(X')$ für $X' \subseteq X$ bzw. $f^*(Y') = f^{-1}(Y')$ für $Y' \subseteq Y$.

(i) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,

(b) f_* ist injektiv,

(c) f^* ist surjektiv.

(ii) Welche Eigenschaften von f_* bzw. f^* sind äquivalent zur Surjektivität von f? Beweise diese Äquivalenz.

(iii) Ist f bijektiv, so sind f_* und f^* zueinander inverse Abbildungen.

Lösung. (i) Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei f injektiv. Seien $X_1, X_2 \subseteq X$ zwei Teilmengen mit $f_*(X_1) = f_*(X_2)$, also $f(X_1) = f(X_2)$. Wir wollen folgern, daß $X_1 = X_2$ ist. Dazu sei $x_1 \in X_1$. Da $f(x_1) \in f(X_1) = f(X_2)$ ist, existiert ein $x_2 \in X_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Aber f ist injektiv, also muß $x_1 = x_2$ sein. Deshalb ist $x_1 \in X_2$. Da $x_1 \in X_1$ beliebig war, folgt $X_1 \subseteq X_2$. Mit vertauschten Rollen folgt auch $X_1 \supseteq X_2$.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Es gelte f_* ist injektiv. Wir wollen die Injektivität von f zeigen. Dazu seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Definiere $X_1 = \{x_1\}$ und $X_2 = \{x_2\}$. Dann ist

$$f(X_1) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$$
$$f(X_2) = f(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}.$$

Deshalb ist $f_*(X_1) = f(X_1) = f(X_2) = f_*(X_2)$. Da f_* injektiv ist, muß $X_1 = X_2$ gelten, sprich $\{x_1\} = \{x_2\}$. Das bedeutet aber schon $x_1 = x_2$.

Zu (a) $\Rightarrow$ (c): Wieder sei f injektiv. Sei $X' \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir wollen eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $f^*(Y') = X'$ finden. Wir wählen $Y' = f(X')$. Dann ist $f^{-1}(f(X')) = X'$ mit Aufgabe 2(i) von Blatt 2.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Wir setzen f^* als surjektiv voraus. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann betrachten wir die Mengen $X_1 = \{x_1\}$ und $X_2 = \{x_2\}$. Es gibt Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ mit $f^*(Y_1) = X_1$ und $f^*(Y_2) = X_2$. Es gilt also

$$\{x_1\} = X_1 = f^{-1}(Y_1) \supseteq f^{-1}(f(x_1)) \supseteq \{x_1\}$$
$$\{x_2\} = X_2 = f^{-1}(Y_2) \supseteq f^{-1}(f(x_2)) \supseteq \{x_2\}.$$

In beiden Zeilen muß also bereits Gleichheit gelten. Da $f(x_1) = f(x_2)$, folgt aber $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$ und deshalb $\{x_1\} = \{x_2\}$.

(ii) Es ist zu zeigen, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist surjektiv,

(b) f_* ist surjektiv,

(c) f^* ist injektiv.

Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $Y' \subseteq Y$ eine Teilmenge. Wählen wir $X' = f^{-1}(Y')$, so gilt nach Aufgabe 2(ii) von Blatt 2, wegen der vorausgesetzten Surjektivität von f, daß $f_*(X') = f(f^{-1}(Y')) = Y'$ ist.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $y \in Y$. Setze $Y' = \{y\}$. Wegen der Surjektivität von f_* gibt es ein $X' \subseteq X$ mit $f_*(X') = Y'$, sprich $f(X') = \{y\}$. Dann muß X' nicht-leer sein. Wähle ein $x \in X'$ aus. Es erfüllt $f(x) = y$.

Zu (a) $\Rightarrow$ (c): Seien $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ zwei Teilmengen mit $f^*(Y_1) = f^*(Y_2)$. Wir zeigen $Y_1 = Y_2$. Sei $y_1 \in Y_1$. Da f als surjektiv vorausgesetzt ist, existiert ein $x_1 \in X$ mit $f(x_1) = y_1$. Dann ist aber $x_1 \in f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$, was bedeutet $y_1 = f(x_1) \in Y_2$. Da $y_1 \in Y_1$ beliebig gewählt war, erhalten wir $Y_1 \subseteq Y_2$. Genauso beweist man $Y_1 \supseteq Y_2$.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Sei $y \in Y$. Setze $Y_1 = \{y\}$ und $Y_2 = \emptyset$. Dann ist $Y_1 \neq Y_2$, also auch $f^*(Y_1) \neq f^*(Y_2)$ aufgrund der vorausgesetzten Injektivität von f^*. Das bedeutet aber $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Wir haben gezeigt, daß die Faser eines beliebigen $y \in Y$ nicht-leer ist; das ist äquivalent zur Surjektivität von f.

(iii) Ist f bijektiv, so sind, gemäß (i) und (ii), auch f_* und f^* bijektiv. Deshalb reicht es zu zeigen, daß, zum Beispiel, $f_* \circ f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(Y)}$ ist. Dazu sei $Y' \subseteq Y$. Es ist

$$(f_* \circ f^*)(Y') = f(f^{-1}(Y')) = Y',$$

denn f ist insbesondere surjektiv.