M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 9—

Aufgabe* 1. Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines K-Vektorraums V.

(i) Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ ist oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

(ii) Stets gilt $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

(iii) Gib ein Beispiel mit $U_1 \cap (U_2 + U_3) \not\subseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$.

(iv) Falls $U_2 \subseteq U_1$, so gilt: $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_2 + (U_1 \cap U_3)$.

Aufgabe* 2. Sei G eine endliche Gruppe mit Verknüpfung $*$ und neutralem Element e. Es gelte $x * x = e$ für jedes $x \in G$. Zeige, daß es eine natürliche Zahl n mit $|G| = 2^n$ gibt.
Hinweise: Zeige zuerst, daß G abelsch ist. Definiere dann eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraumstruktur auf G und argumentiere mit dem Basisexistenzsatz.

Aufgabe 3. In $\mathbb{R}^4$ seien

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{lllll} x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & -x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$

Berechne Basen von U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Für einen Unterraum U von V nennt man $\operatorname{codim}_V(U) := \dim V - \dim U$ die Codimension von U in V.
Seien $U_1, \ldots, U_r$ Unterräume von V. Zeige, daß

$$\operatorname{codim}_V(U_1 \cap \ldots \cap U_r) \leq \operatorname{codim}_V(U_1) + \ldots + \operatorname{codim}_V(U_r)$$

ist.

Aufgabe 5. Im $\mathbb{R}^5$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\9\\-2\\2\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix}0\\-2\\-8\\2\\-4\end{pmatrix},$$

Wähle alle möglichen Basen von $U = \langle v_1, \ldots, v_5 \rangle$ aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ aus und stelle die jeweils übrigen Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren dar.

Aufgabe 6. Sei V ein K-Vektorraum und seien U_1, U_2 zwei Unterräume von V. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(ii) Jedes $v \in U_1 + U_2$ läßt sich auf eindeutige Weise als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ darstellen.

(iii) Je zwei von Null verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sind linear unabhängig.

Frohe Weihnachten und gutes Jahr 2017!

Abgabe am Montag, den **08.01.2017**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.