M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 12—

Aufgabe* 1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Sei $U \subseteq W$ ein Unterraum. Zeige

$$\dim f^{-1}(U) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap U).$$

Aufgabe* 2. Für welche reellen Zahlen x gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\x\end{pmatrix}, \quad \text{und } f\begin{pmatrix}x+1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}?$$

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+3y\\2x-y\\-5x+3y\end{pmatrix}$$

(i) Bestimme die Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

(ii) Zeige, daß

$$\mathscr{A} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und berechne die Darstellungsmatrix $M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)$.

Aufgabe 4. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 2 & 3\\-3 & 5 & 0 & 1\\-1 & 2 & -2 & -2\end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

Bestimme Basen $\mathscr{A}$ von $\mathbb{Q}^4$ und $\mathscr{B}$ von $\mathbb{Q}^3$, so daß

$$M_{\mathscr{A},\mathscr{B}}(l_A) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Abgabe am Montag, den **30.01.2017**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.
Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.