M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 3—

Aufgabe* 1. (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 3x, & \text{falls } x < 1, \\ 5 - 2x - x^2, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, daß f bijektiv ist und gib f^{-1} an.

(ii) Sei $f_1 : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die erklärt ist durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x < 1, \\ 5 - 2x - x^2, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Finde Beispiele für f_1, so daß

(a) f injektiv, aber nicht surjektiv, bzw.
(b) f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe* 2. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ seien $f_* : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ und $f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ die Abbildungen definiert durch $f_*(X') = f(X')$ für $X' \subseteq X$ bzw. $f^*(Y') = f^{-1}(Y')$ für $Y' \subseteq Y$.

(i) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,
(b) f_* ist injektiv,
(c) f^* ist surjektiv.

(ii) Welche Eigenschaften von f_* bzw. f^* sind äquivalent zur Surjektivität von f? Beweise diese Äquivalenz.

(iii) Ist f bijektiv, so sind f_* und f^* zueinander inverse Abbildungen.

Aufgabe 3. Überprüfe, ob folgende Relationen R auf den reellen Zahlen reflexiv, symmetrisch, bzw. transitiv sind. Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, beschreibe die Menge $\mathbb{R}/R$.

(i) $x\,R\,y$ definiert durch $x - y \in \mathbb{Z}$,

(ii) $x\,R\,y$ definiert durch $x - y \in [0, 1)$,

(iii) $x\,R\,y$ definiert durch $x \neq y$,

(iv) $x\,R\,y$ definiert durch $x^2 + x - 9 = y^2 + y - 9$.

Aufgabe 4. Sei X eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt ein Repräsentantensystem von $\sim$, falls

- $x \not\sim y$ für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$ gilt und
- $\bigcup_{x \in S} [x]_\sim = X$.

Zeige, daß dann die Abbildung $S \to X/\sim,\ x \mapsto [x]_\sim$ bijektiv ist.

Abgabe am Montag, den **14.11.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.