M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 14—

Aufgabe 1. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$$

durch elementare Zeilenumformungen.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Zeige, daß für jedes $x \in K$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

genau $(1-x^n)^{n-1}$ ist. Hinweis: Ziehe das x-fache der zweiten Zeile von der ersten ab, dann das x-fache der dritten von der zweiten, und so weiter.

Aufgabe 3. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Schätze die Anzahl der elementaren Operationen (Additionen und Multiplikationen) die nötig sind, um die Determinante von A zu berechnen

(i) mithilfe der Leibniz Formel, bzw.

(ii) durch Umformung der Matrix in Zeilenstufenform und Aufmultiplizieren der Diagonalelemente.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und seien $A \in M_{r\times r}(K)$, $B \in M_{r\times s}(K)$ und $D \in M_{s\times s}(K)$. Zeige, daß für die Block-Trigonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{(r+s)\times(r+s)}(K)$$

gilt $\det M = (\det A) \cdot (\det D)$. Hinweis: Was bewirkt eine elementare Zeilenumformung innerhalb der ersten r Zeilen bzw. innerhalb der letzten s Zeilen?

Dieser Zettel ist nicht mehr für die Bonuspunkte relevant.