M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 13—

Aufgabe 1. Betrachte die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2y + z, x + 2z).$$

Die Linearität von f muß nicht geprüft werden. Sei $\mathscr{B}$ die Basis bestehend aus den Einheitsvektoren $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ und sei $\mathscr{C} = (w_1, w_2, w_3)$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimme $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

(ii) Zeige, daß $\mathscr{C}$ auch eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(iii) Bestimme die Basiswechselmatrix $S_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.

(iv) Bestimme $M_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f)$ mithilfe der Transformationsformel.

Aufgabe 2. Sei $A \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimme den Rang r von A.

(ii) Finde Basen $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^5$ und $\mathscr{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so daß $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(l_A)$ von der Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Sei $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $1 \leq r \leq m$ eine natürliche Zahl. Betrachte die Matrizen $A \in M_{r\times r}(K)$, $B \in M_{r\times(n-r)}$, $C \in M_{(n-r)\times r}$ und $D \in M_{(n-r)\times(n-r)}$, so daß die Darstellungsmatrix von f bzgl. $\mathscr{B}$ die Blockgestalt

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

hat. Sei $U = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. Zeige, daß $f(U) \subseteq U$ genau dann gilt, wenn $C = 0$ ist.

Aufgabe 4. Sei $K[X]_{\leq n}$ der Unterraum von $K[X]$ aufgespannt von den Monomen $1, X, \ldots, X^n$. Es sei $D : K[X]_{\leq n} \to K[X]_{\leq n}$ die lineare Abbildung mit $D(X^j) = jX^{j-1}$.

(i) Bestimme die Darstellungsmatrix von D bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.

(ii) Sei $n = 6$. Was ist der Rang von D für $K = \mathbb{R}$, bzw. für $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Dieser Zettel ist nicht mehr für die Bonuspunkte relevant.