M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 4—

Aufgabe* 1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Bezeichne die Quotientenabbildung bezüglich $\sim$ mit $q : X \to X/{\sim}$. Zeige, daß es genau dann eine Abbildung $\overline{f} : X/{\sim} \to Y$ mit $f = \overline{f} \circ q$ gibt, wenn für alle $x, x' \in X$ mit $x \sim x'$ schon $f(x) = f(x')$ gilt.

Aufgabe* 2. Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. Die Relation $\sim$ auf X sei wie folgt erkärt: Für reelle Zahlen x, y, x', y' mit $(x, y) \neq (0, 0) \neq (x', y')$ gelte $(x, y) \sim (x', y')$, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$ so gibt, daß

$$\begin{aligned} x' &= tx \text{ und} \\ y' &= ty \end{aligned}$$

sind.

(i) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(ii) Bezeichne die Äquivalenzklasse von $(x, y) \in X$ bezüglich $\sim$ mit $[x : y]$. Zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \to X/{\sim}$, die definiert ist durch $f(x) = [x : 1]$ injektiv ist. Welche Elemente von $X/{\sim}$ liegen nicht in $f(\mathbb{R})$?

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Welche der folgenden Relationen R auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ sind Ordnungsrelationen? Begründe Deine Antwort.

(i) $A \sim_R B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(ii) Sei X eine endliche Menge. Definiere $A \sim_R B \Leftrightarrow |A| \leq |B|$. Dabei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente von A.

(iii) $A \sim_R B \Leftrightarrow A \cap B = B$.

(iv) Sei Y eine nicht-leere Teilmenge von X. Definiere $A \sim_R B \Leftrightarrow A \cup Y \subseteq B \cup Y$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Zeige:

(i) Für alle $x \in G$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.

(ii) Es gilt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ für je zwei Elemente $x, y \in G$.

(iii) Ist $x^2 = e$ für jedes $x \in G$, so ist G abelsch.

(iv) Falls G endlich ist, so existiert zu jedem $x \in G$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $x^n = e$.

Abgabe am Montag, den **21.11.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.