M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

# Übungen zur Linearen Algebra I
## —Blatt 7—

**Aufgabe* 1.** Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Im Folgenden habe ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ immer die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, d.h. $x$ ist von der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind Untervektorräume? Begründe Deine Antwort.

(i) $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$

(ii) $V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_i = 0\}$

(iii) $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$

(iv) $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\}$

**Aufgabe* 2.** Betrachte den Unterraum

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{cccccc} x_1 & +3x_2 & & +x_4 & -2x_5 & = 0 \\ & & & x_4 & -x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = 0 \end{array} \right\}$$

des $\mathbb{R}^5$. Finde zwei Vektoren, die $U$ aufspannen.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ eine Menge und sei $K$ ein Körper. Betrachte die Menge $K^X$ aller Abbildungen $f : X \to K$.

(i) Für $f, g \in K^X$ und $a \in K$ definieren wir

$$f + g : X \to K,\ x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$a \cdot f : X \to K,\ x \mapsto a \cdot f(x)$$

Zeige, daß $K^X$ zusammen mit der Addition $+ : K^X \times K^X \to K^X,\ (f, g) \mapsto f + g$ und der skalaren Multiplikation $\cdot : K \times K^X \to K^X,\ (a, f) \mapsto a \cdot f$ zu einem $K$-Vektorraum wird.

(ii) Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von $X$. Zeige, daß $\{f \in K^X \mid f(y) = 0 \text{ für alle } y \in Y\}$ ein Unterraum von $K^X$ ist.

**Aufgabe 4.** Zeige, daß man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auf natürliche Art als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen kann. Begründe, warum $\mathbb{C}$ als reeller Vektorraum von 1 und i aufgespannt wird.

---

Abgabe am Montag, den **12.12.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.