M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

# Übungen zur Linearen Algebra I
# —Blatt 2—

**Aufgabe* 1.** Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $M_n$ die Teilmenge der ganzen Zahlen, die ein Vielfaches von $n$ sind; also $M_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, a \in \mathbb{Z} : x = an\}$.

(i) Zeige, daß es für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ eine Bijektion $\mathbb{Z} \to M_n$ gibt.

(ii) Zeige, daß es für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine natürliche Zahl $N \geq 1$ mit $M_1 \cap \ldots \cap M_n = M_N$ gibt.

(iii) Was ist $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} M_n$?

**Aufgabe* 2.** Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen $X$ und $Y$. Außerdem seien $M \subseteq X$ sowie $N \subseteq Y$ Teilmengen. Zeige:

(i) Stets gilt $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$. Gleichheit gilt genau dann für alle $M \subseteq X$, wenn $f$ injektiv ist.

(ii) Es gilt $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$. Gleichheit für alle $N \subseteq Y$ ist dann und nur dann erfüllt, wenn $f$ surjektiv ist.

**Aufgabe 3.** Seien $X$, $Y$ und $Z$ Mengen und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeige:

(i) Sind $f$ und $g$ beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Sind $f$ und $g$ beide surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(iii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist $f$ injektiv. Gib ein Beispiel an, in dem $g$ nicht injektiv ist.

(iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so auch $g$. Finde ein Beispiel, für das $f$ nicht surjektiv ist.

(v) Sei $X = Z$. Finde eine nicht-injektive Abbildung $g$ und eine nicht-surjektive Abbildung $f$ für die $g \circ f$ bijektiv ist.

**Aufgabe 4.** Prüfe, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv sind:

(i) $f(x, y) = (x + y^2, y + 2)$

(ii) $f(x, y) = (xy, x + y)$

(iii) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$

(iv) $f(x, y) = \left(x/\sqrt{1 + x^2 + y^2}, y/\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)$

Ist $f$ bijektiv, so gib die Umkehrabbildung an.

**Aufgabe 5.** Diese Aufgabe, die auf Cantor (1845–1918) zurückgeht, ist schwieriger und interessanter als die vorhergehenden. Sei $M$ eine Menge, $f : M \to \mathscr{P}(M)$ eine Abbildung. Setze

$$X := \{m \in M \mid m \notin f(m)\}.$$

Zeige, daß $X$ nicht im Bild von $f$ liegt.
Tip: Sonst ist $X = f(m_0)$ für ein festes $m_0$. Folgere den Widerspruch: $m_0 \in X$ genau dann, wenn $m_0 \notin X$.
Insbesondere ist dadurch gezeigt, daß es keine Bijektion zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge geben kann.

---

Abgabe am Montag, den **07.11.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden maximal 4 Punkten bewertet.