# Vorkurs für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Blatt 6

RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM

Prof. Dr. Karin Baur
Prof. Dr. Patrick Henning
Wintersemester 2025/2026

---

**Aufgabe 1**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x+2| - |x-2|$ ungerade ist.

**Aufgabe 2**

Sei $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Für jede der folgenden Funktionen $f$, bestimmen Sie ob $f$ injektiv bzw. surjektiv ist.

(a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$

(b) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$

(c) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$

(d) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$

**Aufgabe 3**

Seien $f, g$ zwei Polynomfunktionen. Zeigen Sie, dass $f \circ g$, $f + g$ und $fg$ auch Polynomfunktionen sind, und dass gilt:

(a) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ falls $f, g$ nicht konstant sind.

(b) $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

(c) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

**Aufgabe 4** (a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^n - \lambda^n = (x - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} x^i \lambda^{n-1-i}.$$

(b) Sei $f$ eine nicht konstante Polynomfunktion. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann eine Nullstelle von $f$ ist, wenn eine Polynomfunktion $g$ mit $f(x) = (x - \lambda)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.

**Aufgabe 5**

Für jede der folgenden Polynomfunktionen $f, g$, bestimmen Sie die Polynomfunktionen $q, r$ mit $f = gq + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

(a) $f : x \mapsto 4x^2 + 3x - 1$, $\; g : x \mapsto x - 3$,

(b) $f : x \mapsto 2x^3 - x + 1$, $\; g : x \mapsto x^2 + x + 1$,

(c) $f : x \mapsto 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$, $\; g : x \mapsto x^2 + 4$.