

Vorkurs für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Blatt 5

RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

RUB

Prof. Dr. Karin Baur
Prof. Dr. Patrick Henning
Wintersemester 2025/2026

Aufgabe 1

Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, d.h.

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Bestimmen Sie alle reelle Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.
- (b) Sei α eine reelle Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\alpha^{n+1} = \alpha F_{n+1} + F_n.$$

- (c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - \Psi^n),$$

wobei $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sind.

Aufgabe 2

Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:

$$u_0 = 4 \quad \text{und} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- (b) Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 (i) Schreiben Sie folgende Zahlen in algebraischer Form:

(a) $(2 - i)(3 + 8i)$

(b) $(1 - i)\overline{(1 + i)}$

(c) $i(1 - 3i)^2$

(d) $\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$.

(ii) Schreiben Sie folgende Zahlen mit Hilfe der Eulerschen Formel in Exponentialform:

(a) $9i$

(b) $\frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

(c) $\sin(\varphi) + i \cos(\varphi)$.

Aufgabe 4

Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(a) $(4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z$

(b) $2z + i = \bar{z} + 1.$

Aufgabe 5

Eine komplexe Zahl der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt **Gaußsche Zahl**, und man schreibt $\mathbb{Z}[i]$ für die Menge aller gaußschen Zahlen.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ unter Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen ist.

(ii) Für alle $z \in \mathbb{C}$, sei $N(z) := z\bar{z}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt $N(zz') = N(z)N(z')$.

(b) Zeigen Sie: ist $z \in \mathbb{Z}[i]$, dann ist $N(z) \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie: ist $z \in \mathbb{Z}[i]$ so, dass $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$, dann ist $N(z) = 1$.

(d) Bestimmen Sie alle gaußsche Zahlen z , so dass $z^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ ist.