

Vorkurs für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Blatt 4

Aufgabe 1

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (wenn sie existieren).

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 2n + 1}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n}$

Aufgabe 2

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Man definiert $\sum_{k=1}^n a_k$ induktiv wie folgt:

$$\sum_{k=1}^0 a_k := 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n a_k := a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Aufgabe 3

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Man definiert die n -te Potenz a^n von a induktiv wie folgt:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

(a) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$

(b) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$

(c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ gilt $2^n \geq n^2$.

Aufgabe 5

(Pferde-Paradox)

Für $n \in \mathbb{N}$, sei $A(n)$ die Aussage: „In jeder Herde mit n Pferden haben alle n Pferde die gleiche Farbe“.

(a) Zeigen Sie, dass $A(0)$ und $A(1)$ gelten.

(b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie den Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Offensichtlich ist aber $A(n)$ falsch für alle $n \geq 2$.