RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Vorkurs für angehende Studierende der Mathematik und Physik

Wintersemester 2025/26

Fakultät für Mathematik

Patrick Henning

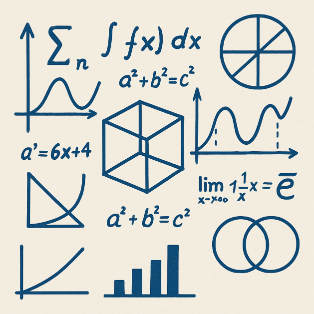
0. Einleitung

Ziel des Vorkurses

- wesentliche Ergebnisse der “Schulmathematik” wiederholen bzw. neu aufbereiten (viel Stoff!)
- auf die Methoden und Verfahrensweisen an der Universität vorbereiten.

Die **zwei** wesentlichen
Säulen der Mathematik:

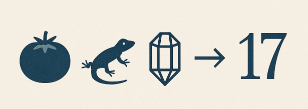
Abstraktion und **Analytik**.



Säule 1: Abstraktion

Dinge aus dem realen Leben werden in die mathematische Sprache übersetzt und alles "Überflüssige" entfernt.

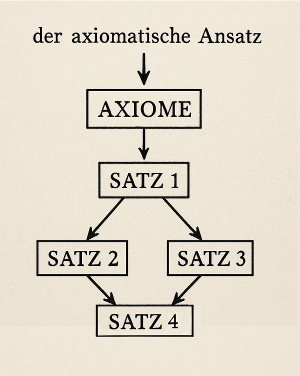
Beispiel: Wenn ich rechnen möchte, dann ist es nicht wichtig, ob es **17** Tomaten, Eidechsen, Edelsteine oder Kilometer sind. Relevant ist nur die Zahl.



Die Begriffe werden im Laufe des Studiums immer komplexer. Wichtig ist, dass man deshalb nie die Anschauung verliert. Man sollte grob wissen, was etwas bedeutet.

Säule 2: Analytik

Kreative mathematisch Arbeit: entdecke verborgene Zusammenhänge zwischen mathematischen Begriffen.



Formales Vorgehen (der axiomatische Ansatz):

Man startet mit “unbezweifelbaren” Aussagen (Axiomen) und folgert daraus mittels logischer Schlussregeln neue Aussagen. $\Rightarrow$ Deduktives Vorgehen.

Hintergrund: Man muss mit bestimmten Begriffen und Zusammenhängen starten, wenn man neue Aussagen beweisen will. Idealerweise nimmt man nur wenige Axiome/Voraussetzungen zu Hilfe.

Ein erfolgreiches Mathematikstudium

Standardvoraussetzungen:

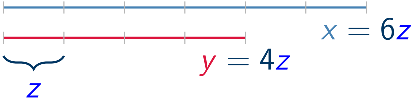
- konsequentes Nacharbeiten!
  (In Vorlesungen wird kaum wiederholt und wenig geübt!)
  - $\leadsto$ sich selbst bewusst machen, was man versteht und was nicht.
  - $\leadsto$ daraus Fragen generieren (speziell zu den regelmäßig zu bearbeitenden Aufgaben)
- über Mathematik sprechen!
  - $\leadsto$ Fragen stellen, wenn man etwas nicht versteht oder mehr wissen möchte (Dozenten, Übungsgruppenleitern, Kommilitonen, ...)
- nie die Bilder vergessen!
  - $\leadsto$ Alle Mathematik ist Abstraktion. Wer die Bilder kennt, kann die Lücken zwischen den Begriffen und dem Konkreten schließen.

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

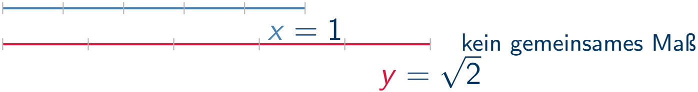
Zwei Strecken heißen kommensurabel, wenn sie mit Hilfe einer dritten Strecke gemessen werden können. Also: x und y sind kommensurabel, wenn es eine weitere Länge z und natürliche Zahlen n und m gibt mit:

$$x = n \cdot z \qquad \text{und} \qquad y = m \cdot z.$$

Kommensurabel: gleiche Einheitslänge z



Nicht kommensurabel: kein gemeinsames Maß z



Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Zwei Strecken heißen kommensurabel, wenn sie mit Hilfe einer dritten Strecke gemessen werden können. Also: x und y sind kommensurabel, wenn es eine weitere Länge z und natürliche Zahlen n und m gibt mit:

$$x = n \cdot z \qquad \text{und} \qquad y = m \cdot z.$$

Folgerung:
Wenn zwei Strecken kommensurabel sind, so ist ihr Verhältnis eine rationale Zahl:

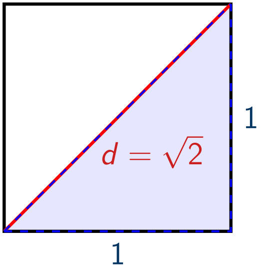
$$\frac{x}{y} = \frac{n \cdot z}{m \cdot z} = \frac{n}{m}.$$

Diese Erkenntnis führte in der Antike zu einer Grundlagenkrise in der Mathematik.

Wir versuchen nun zu erklären warum.

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Wir betrachten ein **Einheitsquadrat** (Seitenlänge 1) und dessen **Diagonale** d:



Wir wissen, dass nach dem Satz des Pythagoras gilt

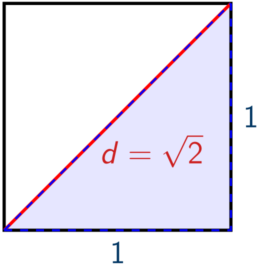
$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2, \qquad \text{also } d = \sqrt{2}.$$

Und wir wissen **heute**, dass $\sqrt{2}$ **irrational** ist.

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Die Pythagoreer glaubten: "**Alles ist Zahl**", im Sinne von **rationalen Zahlen**.

Sie gingen davon aus, dass alle Längenverhältnisse durch ganze Zahlen oder Brüche darstellbar sind (Kommensurabilität).



Wenn wir nicht wissen, dass die Diagonale ($\sqrt{2}$) irrational ist, wie können wir dies einsehen? Es folgt ein **Beweis durch Widerspruch**.

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Beweis durch Widerspruch: Angenommen $d = \sqrt{2}$ ist rational, dann existieren *gekürzte* natürliche Zahlen p und q, so dass

$$d = \frac{p}{q}.$$

Nun gilt jedoch

$$2 = d^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}, \qquad \text{also } p^2 = 2q^2.$$

Daraus folgt p^2 ist eine gerade Zahl. Dann muss auch p gerade sein.

Denn Quadrate von ungeraden Zahlen sind immer ungerade. Dies folgt aus der binomischen Formel mit $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.

Dass p gerade ist bedeutet, dass eine natürliche Zahl r existiert, so dass $p = 2r$. Es folgt

$$p^2 = 4r^2 \qquad \text{und} \qquad 4r^2 = p^2 = 2q^2, \quad \text{bzw. } q^2 = 2r^2.$$

Also ist auch q eine gerade Zahl und insbesondere ist $\frac{p}{q}$ gekürzt. Die ist ein Widerspruch zur Annahme. Damit kann d keine rationale Zahl sein. $\square$

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Folgerung: Der Ausdruck $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben, also nicht als rationale Zahl.

Die Diagonale ist nicht kommensurabel mit der Seitenlänge – es gibt kein gemeinsames Maß, mit dem sich beide Längen ganzzahlig messen lassen.

Diese Erkenntnis führte in der Antike tatsächlich zu einer **Grundlagenkrise in der Mathematik** – insbesondere im Rahmen der damaligen griechischen Mathematik, die stark von der Philosophie des Pythagoreismus geprägt war.

Was genau erschütterte das Weltbild der Pythagoreer so sehr?

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Zweifel an der Arithmetisierung der Geometrie

Wenn nicht alle geometrischen Größen durch Zahlenverhältnisse darstellbar sind, **funktioniert die reine Arithmetik als Grundlage der Geometrie nicht mehr vollständig**.

Dies stellte die Frage in den Raum: *Was ist überhaupt eine Zahl?* Und: *Wie sicher ist unser Verständnis von Raum, Maß und Zahl?* (Erschütterung des Zahlenbegriffs)

Die irrationalen Zahlen fügten der bis dahin etablierten Zahlenwelt (ganze Zahlen, Brüche) eine neue, schwer fassbare Klasse hinzu. Es wurde deutlich, dass **die Menge der rationalen Zahlen "Lücken" enthält**, die man schließen muss, um geometrische Längen vollständig beschreiben zu können.

Dies führte letztlich zu späteren Entwicklungen wie dem reellen Zahlenbereich $\mathbb{R}$.

Ein mathematischer Beweis - Beispiel

Fazit:

Die Entdeckung der Inkommensurabilität (z. B. der Irrationalität von $\sqrt{2}$) zeigte, dass **das bisherige mathematische Fundament unvollständig und unsicher war**. Sie zwang die Mathematiker dazu, neue Konzepte zu entwickeln, um die Mathematik auf eine tragfähigere Grundlage zu stellen – insbesondere:

- Die Erweiterung des Zahlenbegriffs (irrationale und reelle Zahlen)
- Die axiomatische Fundierung der Geometrie (z. B. durch Euklid)
- Später: die formale Mengenlehre und die Grundlagenkrisen des 19./20. Jahrhunderts

1. Grundlagen der Logik

1.1 Definition einer Aussage

Eine **Aussage** ist ein ausformulierter Satz, dem ein **Wahrheitswert** (**wahr** oder **falsch**) zugeordnet werden kann.

Notation: Aussagen werden mit Großbuchstaben (A, B, C, $\ldots$) bezeichnet.

1.2 Beispiele

- 2 ist eine Primzahl $\Rightarrow$ **wahr**
- Eisbären leben überwiegend in der Wüste $\Rightarrow$ **falsch**
- Die *Summe* einer *geraden mit* einer *ungeraden Zahl* ist *ungerade* $\Rightarrow$ **wahr**
- Es gibt eine rationale Zahl r, für die $r^2 = 2$ gilt $\Rightarrow$ **falsch**
- $7 \leq 9$ $\Rightarrow$ **wahr**
- Es gibt außerirdisches Leben.

  $\Rightarrow$ Aussage, aber nicht klar ob **wahr** oder **falsch**

1.3 Beispiele

- "*Viel Glück!*" ist keine Aussage.
- "*Wie spät ist es?*" ist keine Aussage.
- "*Wo ist der Hörsaal HIA?*" ist keine Aussage.

Bemerkung

Es gibt Aussagen, die abhängig vom zugrundeliegenden Regelwerk wahr oder falsch sind. Im “echten Leben” denkt man etwa an das Strafrecht, wo die Aussage “Steuerhinterziehung ist strafbar” abhängig vom jeweiligen Staat wahr oder falsch ist.

Ähnliches gilt für die Mathematik:
Die Wahrheit einer Aussage muss immer auf das jeweilige Axiomensystem (die vorausgesetzten wahren Aussagen) bezogen verstanden werden.

Nehmen wir nun an, dass wir bestimmte wahre Aussagen voraussetzen können, so ist unser Ziel neue wahre Aussagen abzuleiten.

1.4 Konjunktion von Aussagen

Definition: Seien A und B Aussagen, dann bezeichnet $A \wedge B$ (gelesen "A und B") die Aussage, die *genau dann* **wahr** ist, *wenn* sowohl A als auch B **wahr** sind.

$A \wedge B$ heißt die Konjunktion von A und B.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1.5 Beispiel

Betrachte die Aussagen

- A: “7 ist eine Primzahl”
- B: “7 ist gerade”

Dann ist $A \wedge B$ die Aussage “7 ist eine gerade Primzahl”.

Diese ist **falsch**, da zwar A **wahr** ist, aber B **falsch**.

1.6 Definition einer Disjunktion von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Mit $A \vee B$ (gesprochen A oder B) bezeichnen wir die Aussage, die *genau dann* **wahr** ist, *wenn mindestens* eine der beiden Aussagen **wahr** ist.

$A \vee B$ heißt die Disjunktion von A und B.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
f	w	w
w	f	w
f	f	f

Angewendet auf **Beispiel** 1.5 (A: "7 ist eine Primzahl"; B: "7 ist gerade") gilt also: Die Aussage $A \vee B$ ist **wahr**, da die Aussage "7 ist eine Primzahl" **wahr** ist.

Bemerkung

Das logische “oder” ($\vee$) entspricht **nicht** dem umgangssprachlichen “entweder … oder”!

1.7 Beispiele

Überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt der Aussagen $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ für:

- $\boldsymbol{A}$: "19 ist eine Primzahl" und $\boldsymbol{B}$: "$19 \leq 17$"

  Aussage $\boldsymbol{A}$ ist **wahr**, Aussage $\boldsymbol{B}$ ist **falsch**, also ist es eine **Disjunktion** ($\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$)

- $\boldsymbol{A}$: "Es gibt eine rationale Zahl mit $r^2 = 9$" und "$\boldsymbol{B}$: $9 \leq 12$"

  Aussage $\boldsymbol{A}$ ist **wahr**, Aussage $\boldsymbol{B}$ ist auch **wahr**, also ist es **Konjunktion** ($\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$) und **Disjunktion** zugleich ($\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$).

- $\boldsymbol{A}$: "22 ist eine Primzahl" und $\boldsymbol{B}$: "25 ist eine gerade Zahl"

  Aussage $\boldsymbol{A}$ ist **falsch**, Aussage $\boldsymbol{B}$ ist auch **falsch**.

  Es ist also **keine Konjunktion** ($\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$) und auch **keine Disjunktion** ($\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$).

1.8 Definition einer Negation von Aussagen

Sei A eine Aussage. Mit $\neg A$ (gesprochen "nicht A") bezeichnen wir die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

1.9 Beispiel

A: “Es sind nicht mehr Studenten als Studentinnen im Vorkurs.”

$\neg A$: “Es sind mehr Studenten als Studentinnen im Vorkurs.”

B: “Heute ist Dienstag **und** 7 ist eine gerade Zahl.”

$\neg B$: “Heute ist nicht Dienstag **oder** 7 ist keine gerade Zahl.”

Hinweis: Durch das *und* wird die Konjunktion definiert.

Durch das *oder* wird die Disjunktion definiert.

Negation von Verknüpfung: aus “und” $\to$ “oder”

Negation von Verknüpfung: aus “oder” $\to$“und”.

1.10 Beispiel

Prüfe den Wahrheitsgehalt von $\neg A$ für

- A: “2 ist eine rationale Zahl.”

  $\neg A$: “2 ist keine rationale Zahl” $\rightarrow$ $\neg A$ ist **falsch**

- A: “2 ist eine rationale Zahl und 2 ist keine Primzahl”

  $\neg A$: “2 ist keine rationale Zahl *oder* 2 ist eine Primzahl”

  Wir haben eine **Disjunktion**. Die zweite Teilaussage ist richtig $\rightarrow$ $\neg A$ **wahr**.

- A: “44 ist eine gerade Zahl oder heute ist Dienstag.”

  $\neg A$: “44 ist keine gerade Zahl und heute ist nicht Dienstag.”

  Wir haben eine **Konjunktion**.
  $\rightarrow$ $\neg A$ ist **falsch**, da bei der Konjunktion jeder Teil der Aussage richtig sein muss.

1.11 Definition der Implikation von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Mit $A \Rightarrow B$ (gesprochen "A impliziert B") bezeichnen wir die Aussage der **Disjunktion von Aussage B mit** der **Negation von Aussage A**:

$$B \vee \neg A.$$

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

Bemerkung - Teil 1

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

- Die *Implikation* beinhaltet *per Definition* das logische Prinzip „ex falso (sequitur) quodlibet“, d.h. „aus Falschem (folgt) Beliebiges“.
- Dass “$A \Rightarrow B$” für falsches A den Wahrheitswert **wahr** erhält, ist damit nur Festsetzung. Sinn erhält dies z.B. durch die spätere Beweismethode der **Kontraposition**.
- **Intuition:** Gilt A nicht, so kann die Bedingung nicht verletzt werden. In dem Fall ist die Aussage *trivialerweise wahr*.

  Beispiel: “Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.” Falls es gar nicht regnet, liegt keine Verletzung der Bedingung vor – die Implikation ist also wahr.

Bemerkung - Teil 2

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

- "$A \Rightarrow B$" wird hier formell für beliebige Aussagen A und B festgesetzt, die inhaltlich nichts miteinander zu tun haben müssen.

  In praktischen Beweisen sind A und B aber typischerweise eng verknüpft.

- Wenn man in der Mathematik Beweise führt, ist es extrem nützlich, die wahren Implikationen zu kennen.

  Wenn man etwa weiß, dass $A \Rightarrow B$ wahr ist, und wenn auch noch die Prämisse A gilt (etwa weil man sie in einem früheren Schritt beweisen hat), so folgt nun auch B.

1.12 Beispiel

$\boldsymbol{A}$: "Es regnet." $\boldsymbol{B}$: "Die Erde ist nass."

- Die Implikation $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ ist immer **wahr**.
- Die Implikation $\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ kann falsch sein, da die Erde auch aus anderen Gründen nass sein kann.

$\boldsymbol{A}$: "Bochum liegt in Bayern." $\boldsymbol{B}$: "2 ist keine Primzahl."

$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$, also $\boldsymbol{B} \vee \neg \boldsymbol{A}$ entspricht:

"2 ist keine Primzahl oder Bochum liegt nicht in Bayern"

$\rightarrow$ Die **Disjunktion** ist **wahr**, daher ist die **Implikation** **wahr**.

Formulierung: "Wenn Bochum in Bayern liegt, dann ist 2 keine Primzahl."

1.13 Beispiel (Teil 1)

- A: "$1 = 0$",

  B: "$3 \geq 4$"

  $A \Rightarrow B$, also $B \vee \neg A$: "Wenn $1 = 0$, dann ist $3 \geq 4$." $\rightarrow$ **wahr**.

- A: "Es gibt außerirdisches Leben",

  B: "2 ist eine Primzahl"

  $A \Rightarrow B$ bzw. $B \vee \neg A$: ist **wahr**, da unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Aussage A, die Implikation **wahr** ist, so lange wie B **wahr** ist.

- A: "7 ist ungerade",

  B: "$3 \geq 4$"

  Wenn 7 ungerade ist, dann gilt $3 \geq 4$. Diese Implikation ist **falsch**.

1.13 Beispiel (Teil 2)

- A: "Die Summe zweier ungerader Zahlen ist ungerade",

  B: "$2 \cdot 5 = 10$"

  $A \Rightarrow B$, also $B \vee \neg A$:
  "Wenn die Summe zweier ungerader Zahlen ungerade ist, dann gilt $2 \cdot 5 = 10$."

  Diese Implikation ist **wahr**, da A falsch (und B **wahr**) ist.

- A: "5 ist eine Primzahl",

  B: "$2 + 2 = 4$"

  $A \Rightarrow B$, also $B \vee \neg A$: "Wenn 5 eine Primzahl ist, dann gilt $2 + 2 = 4$."
  Die Aussage ist **wahr**.

1.13 Beispiel (Teil 3)

- **A**: "10 ist durch 3 teilbar",

  B: "$7 < 9$"

  $A \Rightarrow B$ bzw. $B \vee \neg A$: ist **wahr**, da B **wahr** ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt von A.

- **A**: "$1 = 0$",

  B: "2 ist gerade"

  "Wenn $1 = 0$, dann ist 2 gerade." Diese Implikation ist **wahr**, da A **falsch** ist.

Bemerkung (Mathematische Beweise)

- Viele mathematische Aussagen sind Implikationen,
  z.B. "Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist die Zahl auch durch 2 teilbar."

  Um eine Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen, geht man folgendermaßen vor:

> Wir nehmen an, dass A **wahr** ist, und zeigen, dass dann auch B **wahr** ist.

Damit ist die einzige Situation, in der die **Implikation falsch** ist, nämlich: "A **wahr**" und "B **falsch**", **ausgeschlossen** und die Implikation ist auf jeden Fall wahr.

1.14 Definition der Äquivalenz von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Mit $A \Leftrightarrow B$ (gesprochen "A ist äquivalent zu B") bezeichnen wir die Aussage, die **genau dann wahr** ist, **wenn A und B beide wahr oder beide falsch** sind.

Mit anderen Worten: es ist die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A wahr ist und genau dann B auch wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	w

Formal:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

A und B sind also äquivalent, wenn beide denselben Wahrheitswert haben.

1.15 Beispiel

$\boldsymbol{A}$: “2 ist eine gerade Zahl”

$\boldsymbol{B}$: “4 ist eine gerade Zahl”

Beide Aussagen sind **wahr**. Also impliziert Aussage $\boldsymbol{A}$ Aussage $\boldsymbol{B}$ und Aussage $\boldsymbol{B}$ impliziert Aussage $\boldsymbol{A}$.

$\rightarrow \quad \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$

Formulierung: 2 ist eine gerade Zahl genau dann, wenn 4 eine gerade Zahl ist.
Dies ist eine wahre Aussage.

1.16 Definition einer Tautologie

Eine **Tautologie** ist eine Aussage, die aufgrund ihrer logischen Struktur immer **wahr** ist.

Tautologien sind als Hilfsmittel manchmal nützlich, liefen sonst aber keine weiterführenden Informationen.

Beispiel: Die doppelte Negation $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ ist eine **Tautologie**:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

Die doppelte Verneinung entspricht also logisch einer Bejahung.

1.17 Beispiel - Teil 1

- Negation einer Disjunktion: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
w	f	f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	f	w	w	w

- Negation einer Konjunktion: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ist eine Tautologie.

  Wahrheitstafel in Übungsgruppen

1.17 Beispiel - Teil 2

- $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ gesprochen:

  "Eine Aussage B ist **wahr**, wenn A **wahr** ist und A die Aussage B impliziert."

  Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
f	f	w	f	w

$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ beschreibt die Schlussregel des *direkten Beweises* (modus ponendo ponens).

1.18 Kontrapositionsgesetz

Das Kontrapositionsgesetz beschreibt das **Prinzip des Widerspruchsbeweises.**

Mathematisch: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ (ist zugleich eine Tautologie).

Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$A \Rightarrow B$	$((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
w	w	f	f	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Eine Kontraposition in der Logik bezeichnet den Umkehrschluss einer Implikation, d.h. aus "Wenn nicht B, dann nicht A" folgert man "Wenn A, dann B".

1.19 Beispiel

These: $((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ ist eine **Tautologie**.

Es ist jedoch **keine Tautologie**, da die folgende Wahrheitstabelle in einem Fall "**falsch**" ergibt.

Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \Rightarrow B$	$((\neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	w	f	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	f	w	f	w

1.20 Satz

RUB

Seien A, B und C Aussagen.

Es gilt:

i) das De Morgansche Gesetz: $\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)$

ii) die Abtrennungsregel: $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \;\Rightarrow\; B$

ii) das Distributivgesetz: $A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Beweis: Übungsaufgabe.

2. Axiome, Behauptungen und Beweise

2.1 Definition eines Axioms

Ein **Axiom** (Postulat, Spielregel) ist eine **grundlegende, allgemein akzeptierte Aussage** oder Annahme, die **ohne Beweis** als **wahr** angenommen wird.

Axiome sind Ausgangspunkte für Theorien.

2.2 Beispiel

RUB

$\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

Mit den Zahlen in $\mathbb{R}$ kann man rechnen (Addition, Multiplikation). Für reelle Zahlen a und b gilt:
$a+b \triangleq$ Notation für die Addition. $a \cdot b$ bzw. $a\,b \triangleq$ Notation für die Multiplikation.

Diese Rechenoperationen gelten für folgende Gesetze:

- Kommutativgesetz: $a+b=b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: $(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Neutrales Element (Existenz): $a+0=a, \quad a \cdot 1 = a$.
  Die Zahl 0 heißt neutral bzgl. der Addition und 1 neutral bzg. der Multiplikation.
- Inverses Element (Existenz): $a+(-a)=0$, $-a$ ist hier additiv invers zu a,
  Für $a \neq 0$ gilt $a \cdot a^{-1} = 1$ und a^{-1} heißt multiplikativ invers zu a.

2.3 Definition einer Behauptung

Eine **Behauptung** ist eine **Aussage**, **die durch logische Schlussfolgerungen bewiesen** werden kann.

Eine Behauptung kann über Beweise auf Axiome zurückgeführt werden.

Typische Bezeichnungen in Mathe-Vorlesungen: Satz, Theorem, Proposition, Lemma, Korollar.

2.4 Beispiel (Rechnen mit $\mathbb{R}$) - Teil 1

Behauptung: Die Gleichung $3x = 84 + x$ hat die eindeutige Lösung $x = 42$.

Schule:

$$\begin{aligned} 3x &= 84 + x \\ 3x - x &= 84 \\ 2x &= 84 \\ x &= 42 \end{aligned}$$

2.4 Beispiel (Rechnen mit $\mathbb{R}$) - Teil 2

Ausgangspunkt: die natürlichen Zahlen sind in $\mathbb{R}$ rekursiv aufgebaut durch $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$ usw.

Behauptung: Die Gleichung $3x = 84 + x$ hat die eindeutige Lösung $x = 42$.

Uni: Es soll gezeigt werden:

(a) $x = 42$ ist eine Lösung der Gleichung.

(b) Es gibt keine andere Lösung als $x = 42$.

Zu (a): Einsetzen von $x = 42$ in die Gleichung:

Linke Seite: $3x = 3 \cdot 42 = (1 + 1 + 1) \cdot 42 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 42 + 1 \cdot 42 = 126$

Rechte Seite: $84 + x = 84 + 42 = 126$

Da beide Seiten übereinstimmen, ist $x = 42$ eine Lösung.

2.4 Beispiel - Teil 3

(b) Es gibt keine andere Lösung als $x = 42$.

Zu (b): Annahme: Seien x_1 und x_2 zwei Lösungen der Gleichung $3x = 84 + x$. **Zeige:** $x_1 = x_2$.

Aus der *Annahme* $3x_1 = 84 + x_1$ und $84 + x_2 = 3x_2$ folgt durch Addition

$$
\begin{aligned}
3x_1 + (84 + x_2) &= 84 + (x_1 + 3x_2) && \text{(Assoziativgesetz)}\\
3x_1 + 84 + x_2 + (-x_2) + (-84) &= 84 + x_1 + 3x_2 + (-x_2) + (-84) && \text{(inverses Element)}\\
3x_1 + 84 + (-84) + x_2 + (-x_2) &= 84 + (-84) + x_1 + 3x_2 + (-x_2) && \text{(Kommutativgesetz)}\\
3x_1 + 0 &= 0 + x_1 + 3x_2 + (-x_2) && \text{(inverses Element)}\\
3x_1 &= x_1 + 3x_2 + (-x_2) && \text{(neutrales Element)}\\
3x_1 + (-x_1) &= x_1 + (-x_1) + 2x_2 + x_2 + (-x_2) && \text{(inverses Element)}\\
2x_1 &= 2x_2 && \text{(neutrales Element)}\\
(2^{-1}) \cdot 2 \cdot x_1 &= (2^{-1}) \cdot 2 \cdot x_2 && \text{(inverses Element)}\\
1 \cdot x_1 &= 1 \cdot x_2 && \text{(inverses Element)}\\
x_1 &= x_2 && \text{(neutrales Element).}
\end{aligned}
$$

Die Lösung ist also eindeutig und damit muss $x = 42$ die einzige Lösung sein. ■

Einschub

Definition (Teiler):

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, dann heißt a ein Teiler von b, falls es eine ganze Zahl $q \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt

$$b = q \cdot a$$

Man schreibt:

$$a \mid b \qquad (a \text{ teilt } b)$$

2.5 Beispiel für einen direkteren Beweis

Es bezeichne $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.

Behauptung:
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sei a ein *Teiler von* b und ein *Teiler von* c, dann ist a auch *Teiler von* $b + c$.

Beweis:
Wir teilen die Behauptung in zwei Aussagen auf:

$$\boldsymbol{A} : \; a \text{ ist ein Teiler von } b \;\text{ und }\; a \text{ ist ein Teiler von } c$$

$$\boldsymbol{B} : \; a \text{ ist ein Teiler von } b + c$$

Sei $a \mid b$, d. h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $b = a \cdot k$.
Sei $a \mid c$, d. h. es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $c = a \cdot n$.
Dann gilt:

$$b + c = a \cdot k + a \cdot n = a(k + n)$$

Da $k + n \in \mathbb{Z}$, folgt: $a \mid (b + c)$. ∎

2.6 Beweis durch Umformung - Existenz

Behauptung:
Für alle reellen Zahlen a, b mit $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $a\,x = b$ die eindeutige Lösung

$$x = a^{-1} \cdot b.$$

Beweis:

(a) **Existenz:** Zeige $x = a^{-1} \cdot b$ ist eine *Lösung der Gleichung*.

Einsetzen in die linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot (a^{-1} \cdot b) \\ &= (a \cdot a^{-1}) \cdot b && \text{(Assoziativgesetz)} \\ &= 1 \cdot b && \text{(multiplikativ Inverses)} \\ &= b && \text{(neutrales Element der Multiplikation)} \end{aligned}$$

Also ist $x = a^{-1} \cdot b$ tatsächlich eine Lösung.

2.6 Beweis durch Umformung - Eindeutigkeit

Behauptung:
Für alle reellen Zahlen a, b mit $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $a\,x = b$ die eindeutige Lösung

$$x = a^{-1} \cdot b.$$

Beweis:
(b) **Eindeutigkeit:** Sei x eine Lösung der Gleichung $a\,x = b$. Dann:

$$
\begin{aligned}
x &= x \cdot 1 && \text{(neutrales Element)} \\
&= x \cdot (a^{-1} \cdot a) && \text{(multiplikativ Inverses)} \\
&= (x \cdot a^{-1}) \cdot a && \text{(Assoziativgesetz)} \\
&= a^{-1} \cdot (a \cdot x) && \\
&= a^{-1} \cdot b && \text{(da } a\,x = b\text{)}
\end{aligned}
$$

Also ist $x = a^{-1} \cdot b$ die einzige Lösung. ∎

2.7 Widerspruchsbeweis - Teil 1

Behauptung:

Sei $\boldsymbol{A}$ die Aussage: "Die Gleichung $x = x + 1$ hat keine Lösung." Dann ist $\boldsymbol{A}$ **wahr**.

Beweis:

Angenommen, es gäbe eine Lösung x für die Gleichung $x = x + 1$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
x &= x + 1 \\
x + (-x) &= (x + 1) + (-x) \\
0 &= (x + 1) + (-x) \\
0 &= (1 + x) + (-x) \\
0 &= 1 + (x + (-x)) \\
0 &= 1 + 0 \\
0 &= 1
\end{aligned}
$$

Dies ist ein Widerspruch.

2.7 Widerspruchsbeweis - Teil 2

Behauptung:
Sei $\boldsymbol{A}$ die Aussage: "Die Gleichung $x = x + 1$ hat keine Lösung." Dann ist $\boldsymbol{A}$ wahr.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann folgt $0 = 1$. Dies ist ein Widerspruch.

Folgerung:
Die Annahme, dass x eine Lösung sei, ist **falsch**.
Also ist $\boldsymbol{A}$ wahr: Die Gleichung $x = x + 1$ hat keine Lösung.

Logischer Bezug:
Sei $\boldsymbol{B}$ die Aussage: "$0 \neq 1$". Dann gilt:

$$\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B} \quad \text{(Annahme einer Lösung führt zu } 0 = 1\text{)}$$

Das ist genau das **Kontrapositionsgesetz**:

$$(\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}) \;\Leftrightarrow\; (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B})$$

Bemerkung

Basierend auf dem **Kontrapositionsgesetz**

$$(B \Rightarrow A) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \Rightarrow \neg B),$$

lässt sich auch direkt ein Beweis durch Kontraposition führen.

Das bedeutet, wir beweisen

“Wenn nicht A, dann nicht B.”

um zu folgern, dass

“Wenn B, dann A.”

2.8 Anordnungsaxiome für reelle Zahlen

RUB

Für positive reelle Zahlen gelte die Relation $a > 0$ (Definition!).

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Relationen $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ wie folgt:

$$\begin{aligned} a > b \quad &\Leftrightarrow \quad a - b > 0 \\ a < b \quad &\Leftrightarrow \quad b > a \\ a \leq b \quad &\Leftrightarrow \quad a < b \ \text{ oder } \ a = b \\ a \geq b \quad &\Leftrightarrow \quad b \leq a \end{aligned}$$

Die **Anordnungsaxiome** lauten:

(O1) Trichotomiegesetz (Vergleichbarkeit):

Für jede reelle Zahl a gilt genau eine der Aussagen:

- $a = 0$
- $a > 0$
- $-a > 0$

(O2) Abgeschlossenheit von $>$ unter Addition und Multiplikation:

Ist $a > 0$ und $b > 0$, dann gilt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

2.9 Feststellungen

Die Anordnungsaxiome **(O1)** und **(O2)** implizieren das Folgende:

i) Ist $a < b$ und $b < c$, dann gilt $a < c$. (Transitivität)

ii) Ist $a < b$ und $c > 0$, dann gilt $ac < bc$. (Kompatibilität I)

iii) Ist $a < b$ und $c < 0$, dann gilt $ac > bc$. (Kompatibilität II)

iv) Ist $a < b$ und c beliebig, dann gilt $a + c < b + c$. (Kompatibilität III)

Beweise:

zu i) $a < b$ und $b < c \;\Rightarrow\; b - a > 0$ und $c - b > 0$

$\Rightarrow\; (c - b) + (b - a) = c - a > 0 \;\Rightarrow\; a < c$

zu ii) $a < b$ und $c > 0 \;\Rightarrow\; b - a > 0 \;\Rightarrow\; (b - a)c > 0 \;\Rightarrow\; bc - ac > 0 \;\Rightarrow\; ac < bc$

zu iii) $a < b$ und $c < 0 \;\Rightarrow\; -c > 0$

$\Rightarrow\; a(-c) < b(-c) \;\Rightarrow\; -ac < -bc \;\Rightarrow\; ac > bc$

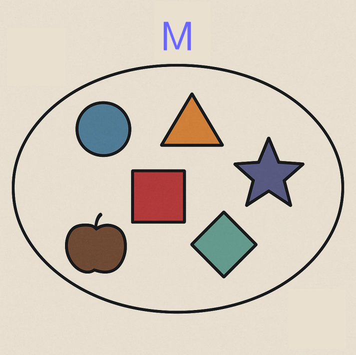
zu iv) $a < b \;\Rightarrow\; b - a > 0 \;\Rightarrow\; (b + c) - (a + c) = b - a > 0 \;\Rightarrow\; a + c < b + c$

3. Mengen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition einer Menge (nach Cantor)

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen.



3.1.2 Beispiele

- Menge der Zahlen 1, 2, 3, 4:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

- Menge der Buchstaben a, b, c ,d:

$$B = \{a, b, c, d\}$$

- Menge der Symbole ♦, ♠, ♣, ♡:

$$C = \{\blacklozenge, \spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$$

Beachte: Bei dieser Schreibweise kommt es nicht auf die Reihenfolge an.

Die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 3, 2\}$ sind gleich.

Jedoch ist $\{1, 2, 2\}$ dieselbe Menge wie $\{1, 2\}$ (wohlunterschieden!).

3.1.3 Notation

RUB

- Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet: $\mathsf{M}, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$
- Zugehörigkeit: "4 gehört zu $\{1, 2, 3, 4\}$" $\Leftrightarrow$ $4 \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Mengenschreibweise mit Eigenschaft:

$$\{x : x \text{ ist durch 2 teilbar}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

- Allgemein: $\{x : x \text{ mit Eigenschaft } E\}$

Pünktchen (wie im dritten Beispiel) werden oft eingesetzt, um Mengen schnell fassbar darzustellen. Um Missverständnissen vorzubeugen, sind aber Definitionen über eine Eigenschaft (Aussagenform) mathematisch oft zu bevorzugen.

3.1.4 Beispiel: wichtige Mengen

- Natürliche Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}, \qquad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Ganze Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Rationale Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$$

- Reelle Zahlen:

$\mathbb{R}$ (mit bisherigen Mitteln nicht vollständig beschreibbar)

- Leere Menge (die Menge, die keine Elemente enthält):

$$\emptyset := \{\ \}$$

Bemerkung

Beispiel für die leere Menge:

$$M = \{x \in \mathbb{N} : 2x = \tfrac{1}{4}\} = \emptyset.$$

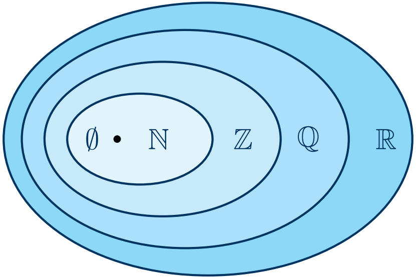
Bemerkung: Aussage $x \in \emptyset$ ist immer **falsch**, (bzw. $x \notin \emptyset$ ist eine Tautologie).

Wir benötigen die leere Menge vor allem, um ständige Fallunterscheidungen zu vermeiden, weil nicht immer sofort klar ist, ob eine Menge Elemente enthält oder nicht.

3. Mengen

3.2 Beziehungen zwischen Mengen

Beobachtung



$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Daraus ergeben sich folgende Fragen:

- Wann sind zwei Mengen gleich?
- Wann ist eine Menge in einer anderen enthalten?

3.2.1 Definition: Teilmenge

Seien A, B zwei Mengen.

A ist eine **Teilmenge** von B, wenn jedes Element aus A auch in B enthalten ist.

$$A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Notation:

- Der sogenannte Allquantor $\forall$ wird später noch eingeführt.
- $A \subset B$: echte Teilmenge (d.h. $A \neq B$)
- $A \subseteq B$: A ist Teilmenge oder gleich B

3.2.2 Definition: Gleichheit von Mengen

Seien A, B zwei Mengen.

A und B heißen **gleich**, falls sie dieselben Elemente enthalten.

$$
\begin{aligned}
A = B \quad &:\Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)
\end{aligned}
$$

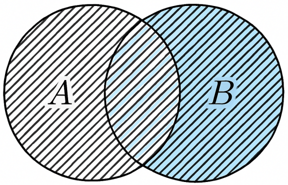
3. Mengen

3.3 Operationen mit Mengen

3.3.1 Definition: Vereinigung

Seien A, B zwei Mengen. Die Vereinigung von A und B ist definiert durch:

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



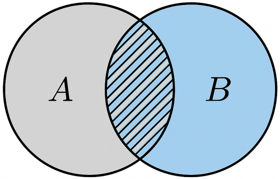
$A \cup B$

Beispiel: $\{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}$

3.3.2 Definition: Durchschnitt

Seien A, B zwei Mengen. Der Durchschnitt von A und B ist definiert durch:

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



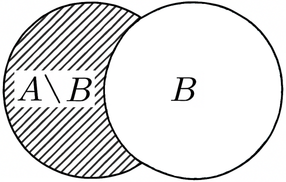
$A \cap B$

Wenn $A \cap B = \emptyset$, heißen A und B disjunkt.

3.3.3 Definition: Differenz

Seien A, B zwei Mengen. Die Differenz von A und B ist definiert als:

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$



$A \setminus B$

Dies wird auch als Komplement von B bezüglich A bezeichnet.

Wenn $A \subseteq M$, schreibt man auch $M \setminus A = A^c$.

3.3.4 Lemma: Rechenregeln

Für Mengen A, B, C gelten:

- Kommutativität:
$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$
- Assoziativität:
$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$
- Distributivität:
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$
- De Morgan:
$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Beweis: Kommutativität

Zu zeigen: $A \cap B = B \cap A$

Beweis.

Sei $x \in A \cap B$ beliebig. Dann gilt:

$$x \in A \;\wedge\; x \in B \;\Rightarrow\; x \in B \;\wedge\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B \cap A$$

Also ist $x \in B \cap A$.

Analog zeigt man auch die andere Inklusion. Damit folgt:

$$A \cap B = B \cap A$$

$\square$

Beweis: Distributivität (1. Aussage)

RUB

Zu zeigen: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis.

Sei $x \in A \cup (B \cap C)$. Dann gilt (mit dem Distributivgesetz für Aussagen aus Satz 1.20):

$$\begin{aligned} x \in A \ \vee\ (x \in B \wedge x \in C) &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) &\Rightarrow x \in A \ \vee\ (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

Also sind beide Mengen gleich. $\square$

Beweis: De-Morgan-Regel (1. Aussage)

Zu zeigen: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Beweis.

Sei $x \in (A \cap B)^c$. Dann gilt (mit De Morganschem Gesetz für Aussagen aus Satz 1.20):

$$x \notin A \cap B \Rightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$$

Umgekehrt: Sei $x \in A^c \cup B^c$. Dann gilt:

$$x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$$

Somit folgt die Gleichheit. $\square$

Die verbleibenden Beweise werden in den Übungen erbracht.

3.3.5 Definition: Quantoren - Teil 1

Sei $E(x)$ eine Aussage über x (Wahrheitswert **wahr** oder **falsch**). Wir können $E(x)$ auch als Eigenschaft von x auffassen.

Weiter sei M eine Grundmenge (d.h. eine Menge zulässiger Objekte für x).

- **Existenzquantor** ($\exists$):

$$\exists x \in \mathsf{M} : E(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in \mathsf{M} : E(x)\} \neq \emptyset$$

  Gesprochen: "Es gibt ein x, sodass die Aussage $E(x)$ gilt."

- **Allquantor** ($\forall$):

$$\forall x \in \mathsf{M} : E(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in \mathsf{M} : E(x)\} = \mathsf{M}$$

  Gesprochen: "Für alle x in M wird die Aussage erfüllt."

3.3.5 Definition: Quantoren - Teil 2

Sei $E(x)$ eine Aussage über x und M eine Grundmenge.

- **Verneinter Existenzquantor** ($\nexists$):

$$\nexists x \in \mathsf{M} : E(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in \mathsf{M} : E(x)\} = \emptyset.$$

- **Verneinungen** ($\neg$):

$$\neg(\forall x \in \mathsf{M} : E(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathsf{M} : \neg E(x) \qquad \text{(es gibt ein } x \text{ für das } E \text{ nicht gilt)}$$

$$\neg(\exists x \in \mathsf{M} : E(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathsf{M} : \neg E(x) \qquad \text{(für kein } x \text{ gilt } E\text{)}$$

3.3.6 Beispiel zu Quantoren (Teil 1)

RUB

- $\forall x \in$ Städte : $E(x)$: "In allen Städten x gibt es guten Kaffee" ($\forall$)
- $\exists x \in$ Städte : $E(x)$: "Es gibt eine Stadt x, in der es guten Kaffee gibt" ($\exists$)
- $\nexists x \in$ Städte : $E(x)$: "Es gibt keine Stadt x, in der es guten Kaffee gibt" ($\nexists$)

Explizite Beispiele

- Allquantor ($\forall$)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

"Für alle reellen Zahlen x gilt: x^2 ist größer oder gleich 0."

- Existenzquantor ($\exists$)

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$$

"Es existiert (mindestens) eine reelle Zahl x, sodass $x^2 = 4$."

3.3.6 Beispiel zu Quantoren (Teil 2)

- Allquantor ($\forall$)

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; n > 0$$

"Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n > 0$."

- Existenzquantor ($\exists$)

$$\exists x \in \mathbb{N}: \; x \text{ ist gerade}$$

"Es existiert (mindestens) eine natürliche Zahl x, die gerade ist."

- Nicht-Existenzquantor ($\nexists$)

$$\nexists x \in \mathbb{N}: \; x < 0$$

"Es gibt keine natürliche Zahl x, die kleiner als 0 ist."

3.3.6 Beispiel zu Quantoren (Teil 3)

- Verschachtelte Quantoren

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ y > x$$

"Für jede reelle Zahl x existiert eine reelle Zahl y, die größer ist als x."

- Verschachtelte Quantoren

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}: \ x + y = 0)$$

Mit den de Morganschen Regeln folgt

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \ x + y \neq 0$$

"Für jede reelle Zahl x existiert (mindestens) eine reelle Zahl y, sodass $x + y \neq 0$."

Äquivalent:

"Es existiert kein einzelnes x, das mit allen y die Gleichung $x + y = 0$ erfüllt."

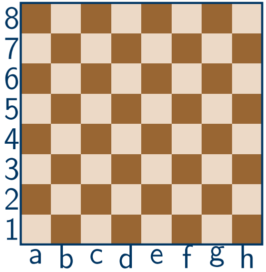
3.3.7 Definition: Kartesisches Produkt

Seien A, B zwei Mengen. Das kartesische Produkt (oder Kreuzprodukt) ist:

$$A \times B \quad := \quad \{\, (a, b) \;:\; a \in A,\; b \in B \,\}$$

Das Paar (a, b) heißt geordnetes Paar.

Beispiel: Schachbrett



3.3.8 Beispiele zum kartesischen Produkt

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (Ebene, bzw. 2-dimensionales kartesisches Koordinatensystem)
- $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

  $$\Rightarrow \quad A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

- $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $B = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

  $$\Rightarrow \quad A \times B \subset \mathbb{R}^2$$

  (Rechteck in einem 2-dimensionales kartesisches Koordinatensystem)
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

  ($3d$-Raum, bzw. 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem)
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ergibt Paare ganzer Zahlen

3. Mengen

3.4 Größe von Mengen

3.4.1 Definition - Kardinalität

Wir haben zuvor gesehen:

Wenn A 2 Elemente hat und B 2 Elemente hat, dann besitzt $A \times B$ 4 Elemente.

Definition:
Die Anzahl von Elementen einer Menge A heißt Kardinalität oder Mächtigkeit von A.

Notation: $|A|$ oder $\#A$

- $|A| = 0 \iff A = \emptyset$
- $|A| < \infty \iff A$ ist eine **endliche Menge**
- $|A| = \infty \iff A$ ist eine **unendliche Menge**

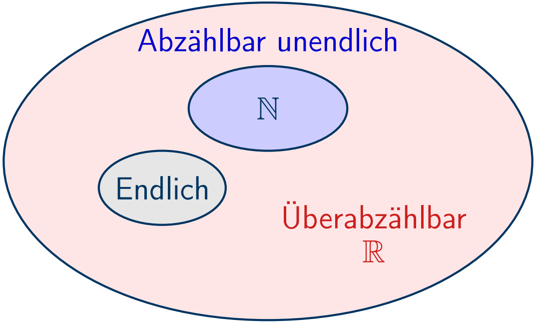
3.4.2 Beispiel

- $|\{1,2,3\}| = 3$
- A hat 2 Elemente, B hat 2 Elemente $\Rightarrow$ $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ hat 4 Elemente
- $|\mathsf{A} \times \mathsf{B}| = |\mathsf{A}| \cdot |\mathsf{B}|$
- $|\mathbb{R}| = \infty$, $|\mathbb{Z}| = \infty$, aber: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$!

3.4.3 Definition - Abzählbarkeit

Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie die *gleiche Mächtigkeit* besitzt wie $\mathbb{N}$, z.B. $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$.

Eine Menge, die *weder endlich noch abzählbar unendlich* ist, heißt überabzählbar, z.B. $\mathbb{R}$.



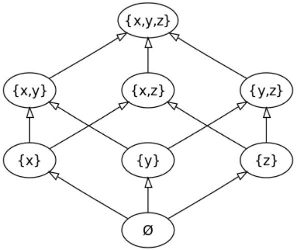
3.4.4 Definition - Potenzmenge

Sei M eine Menge.

Die **Potenzmenge** von M ist die Menge, die alle Teilmengen von M enthält.

Notation: $$\mathcal{P}(M) := \{ A : A \subseteq M \}$$

Dabei gilt immer: $M \in \mathcal{P}(M)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$



3.4.5 Beispiel

- $\mathsf{M} = \{0, 1\}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathsf{M}) \; = \; \{\, \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \,\}$$

- $\mathsf{M} = \{\text{Rechteck}, \text{Kreis}\}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathsf{M}) \; = \; \{\emptyset, \{\text{Rechteck}\}, \{\text{Kreis}\}, \{\text{Rechteck}, \text{Kreis}\}\}$$

- $\mathsf{M} = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(\mathsf{M}) = \{\emptyset\}$$

Beachte: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!

3.4.6 Satz

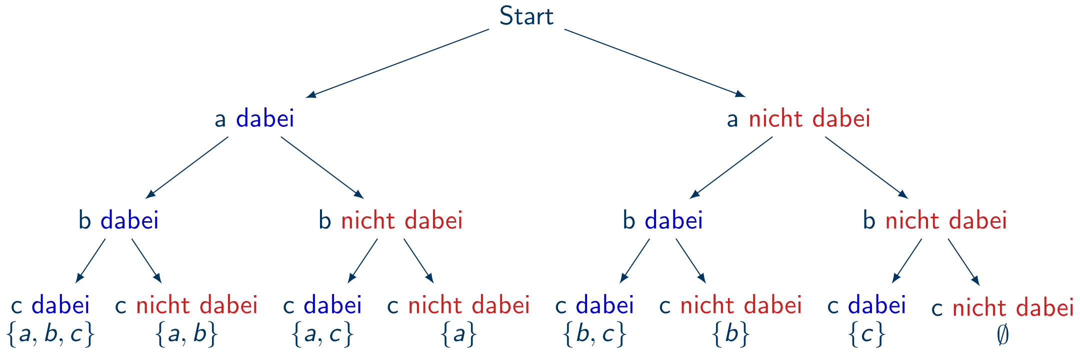
Sei M eine endliche Menge. Dann gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Beweisidee zu Satz 3.4.6

Sei M endlich mit $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, dann hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Kardinalität 2^n.

Beweisidee: Alle Teilmengen von M entstehen, in dem man der Reihe nach für jedes Element von M entscheidet, ob es zur Teilmenge gehören soll oder nicht. Illustration für $M = \{a, b, c\}$:



Beweis zu Satz 3.4.6

Wir zeigen: $|M| = n \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\;$ Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ hat Kardinalität 2^n.

Beweis: Jede Teilmenge von M entsteht, in dem man für jedes Element von M sukzessive entscheidet, ob es zur Teilmenge gehören soll oder nicht.

Da M genau n Elemente besitzt und für jedes dieser Elemente zwei Möglichkeiten bestehen (enthalten oder nicht enthalten), gibt es insgesamt

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$$

verschiedene Kombinationen, also genau 2^n Teilmengen.

Damit hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente, d.h. $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$. $\square$

4. Folgen und Summen

4.1 Definition

Wir wollen im Folgenden weitestgehend auf die unpräzise Schreibweise mit Pünktchen verzichten und führen dazu ein neues Zeichen ein.

Definition:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede natürliche Zahl $1 \leq k \leq n$ sei eine reelle Zahl a_k gegeben.
Dann bezeichnet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

die Summe all dieser Zahlen.

- n heißt Obergrenze der Summe und 1 ist Untergrenze,
- k heißt Laufindex,
- und die a_k Summationsterme.

4.2 Beispiel

- $n = 2, \quad a_1 = 4, \ a_2 = 7$:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = 4 + 7 = 11$$

- $n = 3, \ a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = -3$:

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

- n beliebig, $a_k = k$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + 2 + \cdots + n$$

4.3 Regeln zum Umgang mit dem Summenzeichen
Teil 1

1. Wie der Laufindex heißt, ist egal!

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k \; (= a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

2. Beliebige Grenzen:

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{\ell-1} + a_\ell \qquad \text{für beliebige } k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Man vereinbart: Für $k > \ell$ ist die "leere Summe" Null!

3. Assoziativgesetz: Für $1 \leq m \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

4.3 Regeln zum Umgang mit dem Summenzeichen
Teil 2

RUB

4. Distributivgesetz: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$c \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k).$$

5. Kommutativgesetz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \;=\; (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n).$$

4.3 Regeln zum Umgang mit dem Summenzeichen
Teil 3

6. Umnummerierung der Indizes:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n-m+1} a_{m-1+j}.$$

Eigenschaft **6.** ist oft die schwierigste:

Links summiert man $a_m + \cdots + a_n$.

Rechts summiert man $a_{m-1+1} + a_{m-1+2} + \cdots + a_{m-1+(n-m+1)}$.

Beides ist offenbar dasselbe. (Hinschreiben hilft!)

4.4 Beispiel - Geometrische Summenformel

Geometrische Summenformel: Ist $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Beweis: Wie immer gilt, die Formel zu finden ist das Problem. Mit folgendem Trick ist das jedoch einfach:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)(a-1) &= a\sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Wegen $a \neq 1$ darf man teilen. $\square$

4.5 Beispiel - Summe der ersten Quadratzahlen
Teil 1

Die Summe der ersten Quadratzahlen ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis per Induktion:

IA: Für $n = 1$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

IV: Es gelte für <u>ein</u> $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.5 Beispiel - Summe der ersten Quadratzahlen

Teil 2

IS: $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(2n+1) \;+\; (n+1)\,6\,(n+1)}{6}$$

$$= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} = \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6).$$

Es gilt $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$, also:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$\square$

4.6 Definition - Betrag

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

der Betrag von x.

Es gilt

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

4.7 Definition - Konvergenz einer Zahlenfolge

Konvergiert eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert a, so bedeutet das, dass die Folgenglieder a_n für ausreichend großes n dem Grenzwert beliebig nah kommen.

Sprich, für jede beliebige Genauigkeitsgrenze $\varepsilon > 0$, kann man ein n_0 bestimmen, so dass von diesem Folgenglied an der Abstand $|a_n - a|$ unterhalb von ε liegt.

Formal: Sei (a_n) für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge, d.h. eine geordnete Menge von reellen Zahlen (z.B. $a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.41, \dots$).

Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, falls gilt:

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall n \geq n_0 \text{ gilt : } \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt:

$$a_n \to a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

4.8 Archimedisches Axiom (Satz von Archimedes)

Das **Archimedische Axiom** lautet: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$n > x.$$

Widerspruchsbeweis.

Angenommen, die Aussage gilt nicht. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x.$$

Dann wäre die Menge der natürlichen Zahlen $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben durch x beschränkt.

Da n eine streng wachsende Folge ist, deren Glieder beliebig groß werden können, widerspricht der Annahme, dass sie durch x beschränkt ist.

$\square$

4.9 Beispiel

Betrachte die Folge $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$. Formal:

$$a_n := \frac{1}{n}$$

Wir erwarten, dass $a_n \to 0$.

Beweis: z.z. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nach dem Archimedisches Axiom gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
(genau genommen existiert nach Archimedes für jedes $\frac{1}{\varepsilon}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$)

Also gilt für $n \geq n_0$:

$$|0 - a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. $\square$

4.10 Beispiel

Betrachte die Folge $\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ \ldots$. Formal:

$$a_n := \frac{n}{n+1}$$

Wir erwarten, dass $a_n \to 1$.

Beweis: z.z. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Genau wie im letzten Beispiel existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Also gilt für $n \geq n_0$:

$$|1 - a_n| = \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. $\square$

4.11 Beispiel

Betrachte die Folge $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$. Formal:

$$a_n := n$$

Wir erwarten, dass $a_n \to \infty$, d.h. die Folge divergiert ("konvergiert nicht").

Beweis: Wenn die Folge konvergiert, dann würde gelten

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall n \geq n_0 \text{ gilt } |a - a_n| < \varepsilon.$$

Sei also $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass a_n weit über a hinaus wächst.

Wir wählen $\varepsilon = 1$ (was bereits ausreicht). Wir müssen also für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ finden mit $n - a \geq \varepsilon = 1$, also $n \geq a + 1$.

Das ist nach dem Archimedischen Axiom kein Problem. □

4.12 Definition

Auch ohne den Grenzwert einer Folge erraten zu können, kann man Konvergenz beweisen.

Definition: Eine Folge (a_n) von reellen Zahlen heißt monoton wachsend, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt} : a_n \leq a_{n+1}$$

und monoton fallend, falls gilt

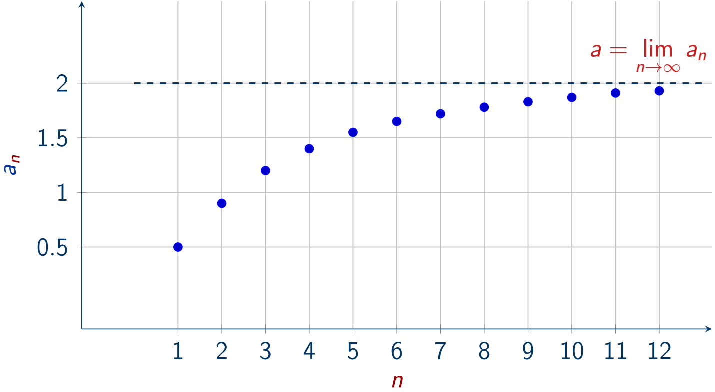
$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt} : a_n \geq a_{n+1}.$$

Die Folge heißt nach oben beschränkt, falls ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Die Folge heißt nach unten beschränkt, falls ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \geq C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

4.13 Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



4.14 Beweis

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann konvergiert $(a_{n\in\mathbb{N}})$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ und a die kleinste obere Schranke der Folge, so dass $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$.

Wegen der Monotonie gilt: $a_n > a - \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. Das bedeutet: $a - a_n < \varepsilon$.

Andererseits gilt $a - a_n > 0$, und damit $|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Genauso zeigt man:
Eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge konvergiert. □

5. Vollständige Induktion

Das Induktionsprinzip

Wir betrachten Aussagen $\boldsymbol{A}(n)$, die von n abhängen.

Gezeigt werden soll die Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Dabei gibt es auch Ausnahmen, aber darauf kommt es letztlich nicht an)

Induktiv heißt: von einem n auf das nächste $n+1$ schließen - und so weiter.

Der Beweis einer Aussage $\boldsymbol{A}(n)$ erfolgt in drei Schritten:

1. **Induktionsanfang (IA):**
   $\boldsymbol{A}(n)$ wird für den kleinstmöglichen Wert n_0 gezeigt.
2. **Induktionsvoraussetzung (IV):**
   Man nimmt an, dass $\boldsymbol{A}(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
3. **Induktionsschritt (IS):**
   Für beliebiges $n \geq n_0$ zeigen wir $\boldsymbol{A}(n+1)$ unter Verwendung von $\boldsymbol{A}(n)$.

5.1 Beispiel Induktionsbeweis - *Induktionsanfang (IA)*

Sei $A(n)$ die Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis durch Induktion:

IA: Setze $n = 1$ ein:

Linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ *Rechte Seite:* $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$\Rightarrow$ Beide Seiten stimmen überein $\Rightarrow$ $A(1)$ ist **wahr**.

5.1 Beispiel Induktionsbeweis - *Induktionsschritt (IS)*

IV: Angenommen, $A(n)$ ist wahr, also:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

IS: Zeige $A(n+1)$ (d.h. die Aussage wenn oben überall n durch $n+1$ ersetzt wird):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Mit Hilfe der **IV** erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\mathbf{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ Aussage gilt auch für $n+1$ $\Rightarrow$ Beweis durch Induktion abgeschlossen. $\square$

5.2 Beispiel Induktionsbeweis

Sei $A(n)$ die Aussage

$$9^n - 1 \quad \text{ist für alle } n \geq 1 \text{ durch } 8 \text{ teilbar.}$$

Beweis:

IA: $n = 1$: $9^1 - 1 = 8$ ist durch 8 teilbar. ✓

IV: Angenommen $9^n - 1$ ist durch 8 teilbar.

IS: Zeige, dass $9^{n+1} - 1$ durch 8 teilbar ist.

$$9^{n+1} - 1 = 9 \cdot 9^n - 1 = (8+1) \cdot 9^n - 1 = 8 \cdot 9^n + 9^n - 1$$

Da $8 \cdot 9^n$ durch 8 teilbar ist und $9^n - 1$ laut **IV** durch 8 teilbar ist, folgt:

$$9^{n+1} - 1 \text{ ist durch } 8 \text{ teilbar.}$$

$\square$

5.3 Beispiel Induktionsbeweis - *Induktionsanfang (IA)*

Sei $A(n)$ die Aussage

$$2^{n+1} > 2^n \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Beweis:

IA: $n = 1$:

$$2^{1+1} = 4, \qquad 2^1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 4 > 2 \quad \checkmark$$

5.3 Beispiel Induktionsbeweis - *Induktionsschritt (IS)*

IV: Angenommen $2^{n+1} > 2^n$ für ein $n \geq 1$.

IS: Zeige $2^{n+2} > 2^{n+1}$. Beachte zunächst, dass gilt

$$2^{n+2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{(n+2) \text{ mal}} = 2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{(n+1) \text{ mal}} = 2 \cdot 2^{n+1}$$

Nach **IV** gilt:

$$2^{n+1} > 2^n \quad \Rightarrow \quad 2^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} \overset{\textbf{IV}}{>} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Es folgt:

$$2^{n+2} > 2^{n+1}$$

$\square$

Fazit: Die Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, durch vollständige Induktion.

5.4 Fakultätsfunktion

Die Fakultätsfunktion ist definiert für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

Die ersten neun Werte der Fakultätsfunktion:

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880

5.5 Beispiel - *Induktionsanfang* (IA)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt:

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Induktionsbeweis:

IA: Für $n = 1$ gilt:

$$1! = 1 \quad \text{und} \quad 2^{1-1} = 2^0 = 1. \qquad \Rightarrow \qquad 1! = 1 \geq 1.$$

IV: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung, d.h.,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

5.5 Beispiel - *Induktionsschritt* (IS)

IV: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung

$$n! \;\geq\; 2^{n-1}.$$

IS: Zu zeigen: $(n+1)! \geq 2^n$. Es gilt:

$$(n+1)! \;=\; (n+1)\cdot n! \;\overset{\textbf{IV}}{\geq}\; (n+1)\cdot 2^{n-1}.$$

Für $n \geq 1$ gilt offensichtlich $n+1 \geq 2$ und damit

$$(n+1)\cdot 2^{n-1} \;\geq\; 2^n$$

Kombinieren wir beide Abschätzungen, so folgt

$$(n+1)! \;\geq\; (n+1)\cdot 2^{n-1} \;\geq\; 2^n.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt für alle $n \geq 1$

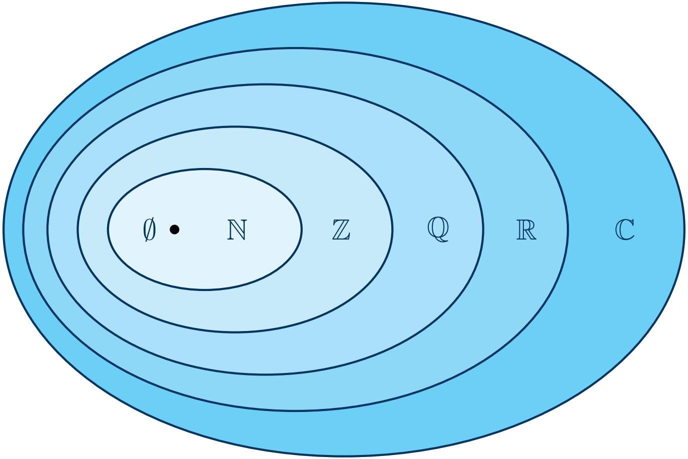
$$\boxed{n! \;\geq\; 2^{n-1}}$$

$\square$

6. Komplexe Zahlen

6.1 Einführung

Zahlenmengen



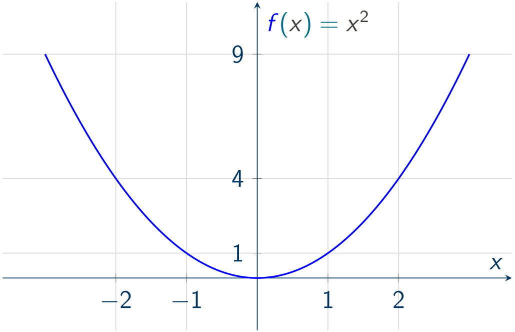
$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

6.1.1 Motivation

Erweiterung der Zahlenbereiche:

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Problem: Die Gleichung $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.



6.1.2 Definition

Die **imaginäre Einheit** i ist definiert als die Zahl, die die Gleichung $x^2 = -1$ löst.

Das heißt:

$$\mathrm{i}^2 = -1 \quad \text{und} \quad \sqrt{-1} = \mathrm{i}.$$

Bemerkung

- Auch andere Gleichungen wie $x^2 = -2$ sind lösbar, z. B. durch $x = \sqrt{2} \cdot \mathrm{i}$, denn $x^2 = (\sqrt{2} \cdot \mathrm{i})^2 = 2 \cdot (-1) = -2$.
- Auch quadratische Gleichungen wie $x^2 - 2x + 3 = 0$ sind lösbar:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 3} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$$

also $x_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$ und $x_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

6.1.3 Definition

RUB

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ heißt ein Ausdruck der Form $a + \mathrm{i}b$ eine **komplexe Zahl**.

Die Menge aller komplexen Zahlen ist:

$$\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Für $z = a + \mathrm{i}b$ gilt:

- a ist der Realteil, $\mathrm{Re}(z) = a$
- b ist der Imaginärteil, $\mathrm{Im}(z) = b$

6.1.4 Beispiel

- $z = 5 + 3\mathrm{i} \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 5, \quad \mathrm{Im}(z) = 3$$

- Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ liegt auch in $\mathbb{C}$, da

$$x = x + 0\mathrm{i}.$$

Daher ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

6.1.5 Bemerkung

Der Real- und Imaginärteil bestimmen eine komplexe Zahl eindeutig, d.h.

$$a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d \iff a = c, \quad b = d.$$

6. Komplexe Zahlen

6.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

6.2.1 Definition - Rechenregeln

Seien $z = a + \mathrm{i}b,\ w = c + \mathrm{i}d \in \mathbb{C}$:

Addition:

$$z + w = (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

Subtraktion:

$$z - w = (a + \mathrm{i}b) - (c + \mathrm{i}d) = (a - c) + \mathrm{i}(b - d)$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd \\ &= ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + (-1)bd = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z \cdot w) = ac - bd \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z \cdot w) = ad + bc$$

6.2.2 Beispiel

RUB

Seien $z = 5 + 3\mathrm{i}, \quad w = 4 + 2\mathrm{i}$:

- $z + w \;=\; (5 + 3\mathrm{i}) + (4 + 2\mathrm{i}) \;=\; 9 + 5\mathrm{i}$
- $z - w \;=\; (5 + 3\mathrm{i}) - (4 + 2\mathrm{i}) \;=\; 1 + \mathrm{i}$
- $z \cdot w \;=\; (5 + 3\mathrm{i}) \cdot (4 + 2\mathrm{i}) \;=\; 20 + 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2 \;=\; 14 + 22\mathrm{i}$
- Für die Division zweier komplexer Zahlen muss der Bruch erweitert werden

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{5+3\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}} = \frac{5+3\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}} \cdot \frac{4-2\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{4^2+2^2}(5 + 3\mathrm{i}) \cdot (4 - 2\mathrm{i}) = \frac{1}{20}(20 - 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2) \\
&= \frac{1}{20}(26 + 2\mathrm{i}) = \frac{13}{10} + \frac{1}{10}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

6.2.3 Konjugation

Für $z = a + \mathrm{i}b$ ist die **komplex konjugierte Zahl** definiert als:

$$\overline{z} := a - \mathrm{i}b$$

Beispiel:

$$\overline{5 + 3\mathrm{i}} = 5 - 3\mathrm{i}.$$

Eigenschaften für $z, w \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, denn $(a + \mathrm{i}b) \cdot (a - \mathrm{i}b) = a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 + b^2$.

6.2.4 Division

Seien $z = a + \mathrm{i}b, \quad w = c + \mathrm{i}d$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i} \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Real- und Imaginärteil sind beide reell und gegeben durch

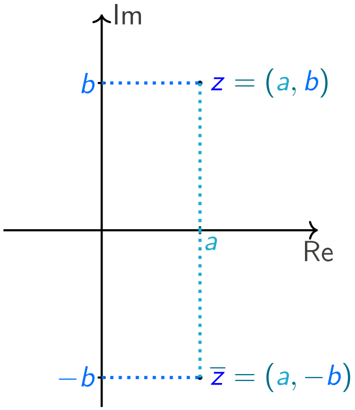
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Beachte: Mit der Notation $|w|^2 := w \cdot \overline{w}$ gilt also

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{|w|^2} z \cdot \overline{w}$$

Ausblick

Eine komplexe Zahl $z = a + \mathrm{i}b$ lässt sich als Punkt in der Ebene visualisieren:



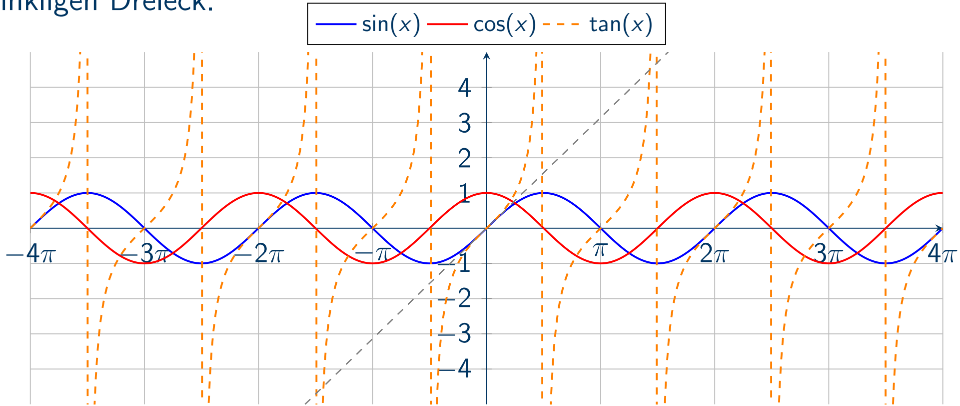
Die komplexe Konjugation entspricht dann geometrisch einer Spiegelung an der Re-Achse.

6. Komplexe Zahlen

6.3 Darstellung in der komplexen Ebene

Einschub - Trigonometrie - Teil 1

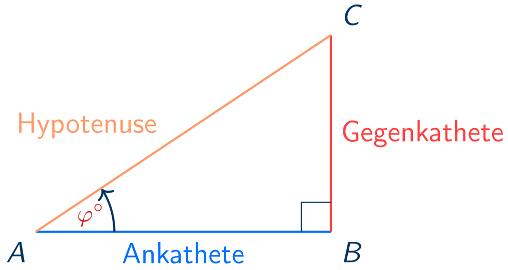
Die Trigonometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Beziehungen zwischen Winkeln und Seitenlängen in Dreiecken beschäftigt, insbesondere im rechtwinkligen Dreieck.



Einschub - Trigonometrie - Teil 2

Die **wichtigsten trigonometrischen Funktionen** (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin(\varphi^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \cos(\varphi^\circ) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \qquad \tan(\varphi^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Rechtwinkliges Dreieck mit Winkel φ° links unten.

Einschub - Trigonometrie - Teil 3

Beachte: Winkel können im Winkelmaß (klassischer Winkel, in der Einheit $^\circ$ [Grad]) oder im Bogenmaß (Vielfache von π, Einheit *rad* [Radiant]) angegeben werden.

Der Zusammenhang lautet:

- Von Grad nach Bogenmaß: $\varphi\,\text{rad} = \varphi^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ}\,\text{rad}$
- Von Bogenmaß nach Grad: $\varphi^\circ = \varphi\,\text{rad} \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi}$

Wann verwendet man welches Maß?

- Gradmaß wird häufig in der Schulmathematik und im Alltag verwendet.
- Bogenmaß wird in höherer Mathematik und Physik verwendet, da viele Formeln (z. B. Ableitungen von Sinus- und Kosinusfunktionen) einfacher/natürlicher sind.

Einschub - Trigonometrie - Teil 4

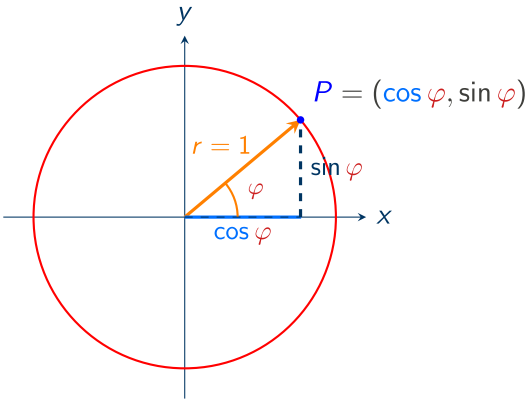
- Von Grad nach Bogenmaß: $$\varphi\,\text{rad} = \varphi^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\,\text{rad}$$
- Von Bogenmaß nach Grad: $$\varphi^\circ = \varphi\,\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Beispiele für Winkel:

Gradmaß	Bogenmaß
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

Einschub - Trigonometrie - Teil 5

Sinus und Kosinus lassen sich am Einheitskreis darstellen. Ein Punkt P auf dem Einheitskreis mit Winkel φ (gemessen von der positiven x-Achse) hat die Koordinaten $P = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.



Einschub - Trigonometrie - Teil 6

Wichtige Identitäten der Trigonometrie:

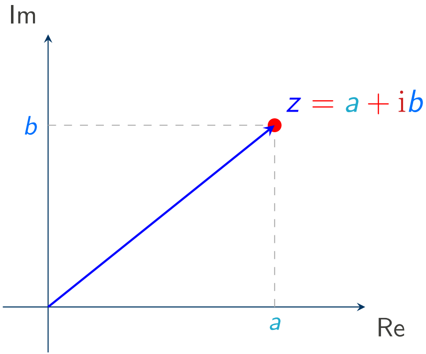
$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \; = \; 1$$

und

$$\tan(\varphi) \; = \; \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \qquad (\text{für } \cos(\varphi) \neq 0)$$

Darstellung komplexer Zahl als Punkt in der Ebene

Jede Zahl $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ entspricht eindeutig einem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.



Winkeldarstellung

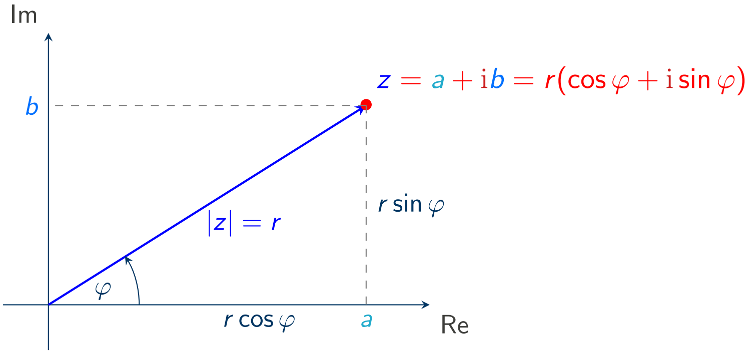
$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z),$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} \Leftrightarrow b = r\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \Leftrightarrow a = r\cos\varphi$$



Wir haben also

$$z = a + \mathrm{i}b = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

wobei $r = |z|$ und φ wird bestimmt durch die Bedingung $\tan\varphi = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \varphi = \arctan(\frac{b}{a})$.

6.3.1 Definition: Betrag

Der Betrag einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Interpretation: Identifizieren wir z mit dem Punkt (a, b), so ist der Abstand des Punktes zum Koordinatenursprung $(0, 0)$ gerade gegeben durch die Länge des Vektors

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Beispiel: $z = 8 + \mathrm{i}5$. Wir erhalten

$$|8 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$$

6.3.2 Definition: Argument

Das Argument von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$\arg(z) = \varphi := \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad \text{wobei } \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Feststellung:

Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist durch Betrag r und Argument φ eindeutig beschrieben:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

Dies nennt man die trigonometrische Form einer komplexen Zahl.

7. Funktionen/Abbildungen

7.1 Einführung

Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element einer *Definitionsmenge* genau ein Element einer *Zielmenge* zuordnet.

7.1.1 Brainstorming

- x-Wert wird eindeutigem y-Wert zugeordnet
- Darstellung Sachverhalt im Graph
- Graph im (2- oder 3-dimensionalen) Koordinatensystem
- können stetig oder differenzierbar sein
- Ableitungen/Integral/weitere Operationen
- gibt Gesetzmäßigkeiten
- Beispiele
  - trigonomische Funktionen: sin, cos, tan, hyperb.
  - exponentiale Funktionen: exp
  - Polynom: z.B.: $x^3 + 4x^5$, x^2, $ax + b$, ...
- Transformation von Wertepaaren

7.1.2 Bemerkung

In der Schulmathematik ist mit einer Funktion oft eine Vorschrift gemeint, z. B.

$$f(x) = x^2 + 1.$$

In der Mathematik ist entscheidend, welche Mengen **A** und **B** beteiligt sind und ob die Abbildung spezielle Eigenschaften wie *Linearität*, *Injektivität* oder *Stetigkeit* besitzt.

7.1.3 Definition - Abbildung - Definitionsbereich/Wertebereich

Seien **X**, **Y** zwei nichtleere Mengen. Eine Abbildung

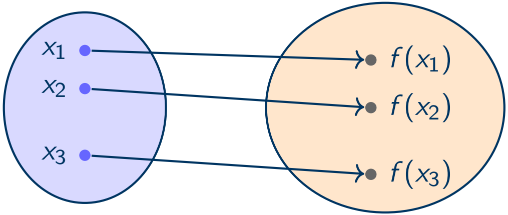
$$\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}, \qquad x \mapsto \mathbf{f}(x)$$

ist eine **Zuordnung**, die **jedem Element** $x \in \mathbf{X}$ **genau ein** $y \in \mathbf{Y}$ **zuordnet**.

Wir schreiben $\mathbf{f}(x) = y$. Dabei ist x das Argument und $\mathbf{f}(x)$ das Bild von x unter $\mathbf{f}$.

X bezeichnet den Definitionsbereich (Definitionsmenge) und **Y** den Wertebereich (Zielmenge).

Definitionsbereich **X**



Wertebereich **Y**

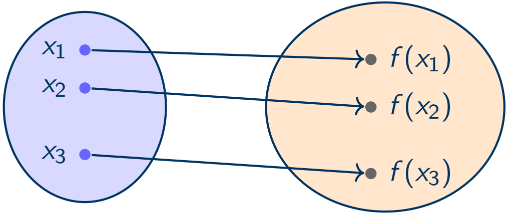
7.1.4 Definition - Bildmenge

Seien X, Y zwei nichtleere Mengen und

$$f : X \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

eine Abbildung.

Definitionsbereich X



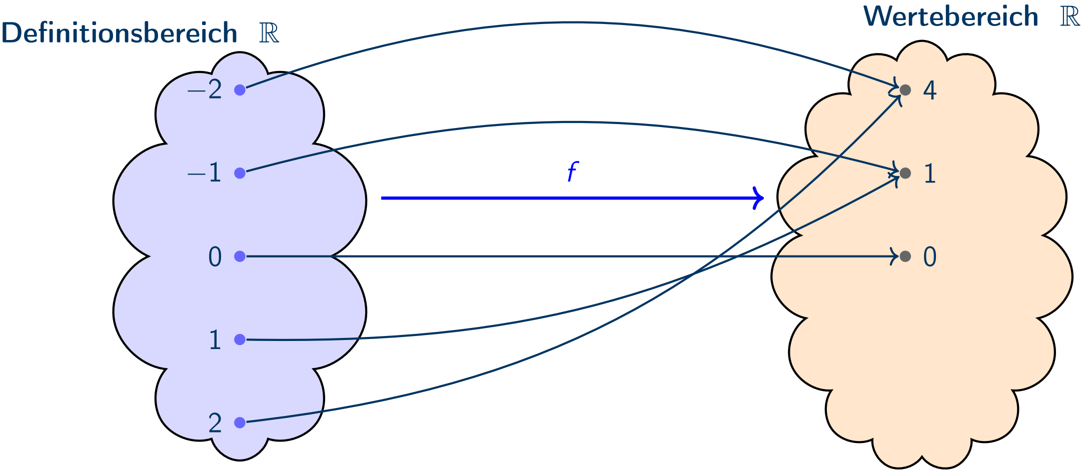
Wertebereich Y

Die Bildmenge der Funktion f ist die Menge

$$\mathrm{Bild}(f) := f(X) := \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y.$$

7.1.5 Beispiel - Teil 1

Betrachte die Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^2$. *Definitionsbereich? Wertebereich? Bildmenge?*



7.1.5 Beispiel - Teil 2

Betrachte die Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^2$. Dann ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } x \mapsto f(x) = x^2.$$

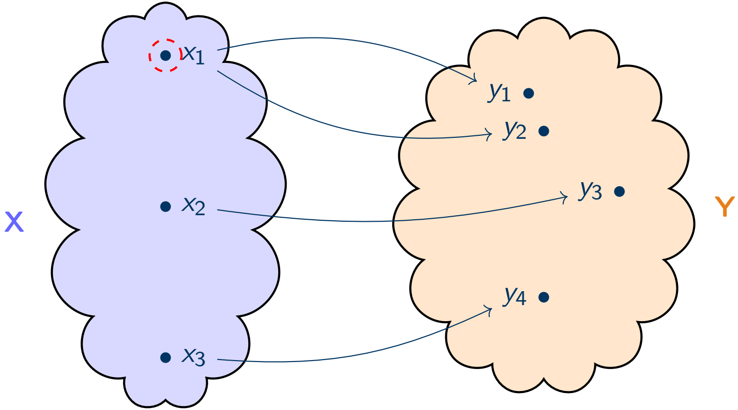
Der Definitionsbereich ist $X = \mathbb{R}$, die Wertebereich $Y = \mathbb{R}$.

Die **Bildmenge** ist dagegen

$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}^+ := [0, \infty).$$

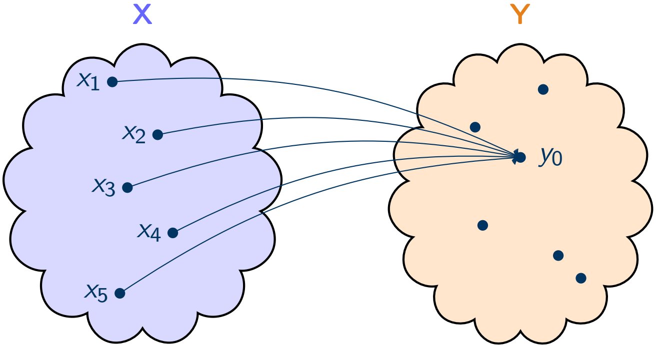
7.1.6 Beispiel

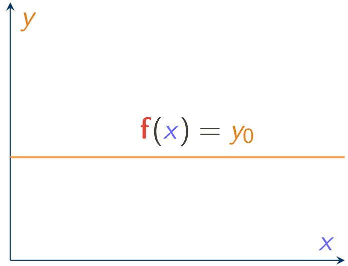
Das folgende ist keine Funktion, da jedem x-Wert nicht genau ein y-Wert zugeordnet wird:



7.1.7 Beispiel

Das folgende beschreibt eine konstante Funktion $\mathbf{f}(x) = y_0$ für alle $x \in \mathbf{X}$:

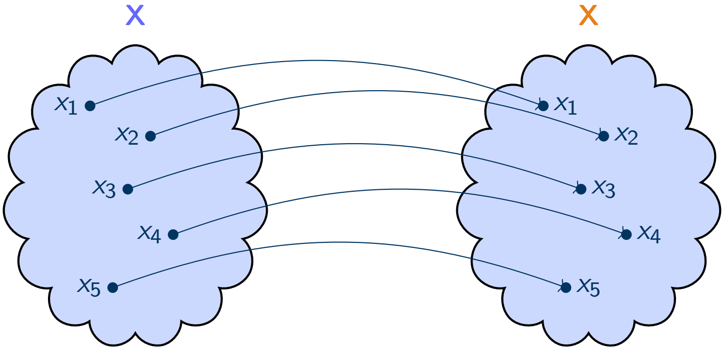




7.1.8 Beispiel

Das Folgende beschreibt die Identiät $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ mit $x \mapsto x$.

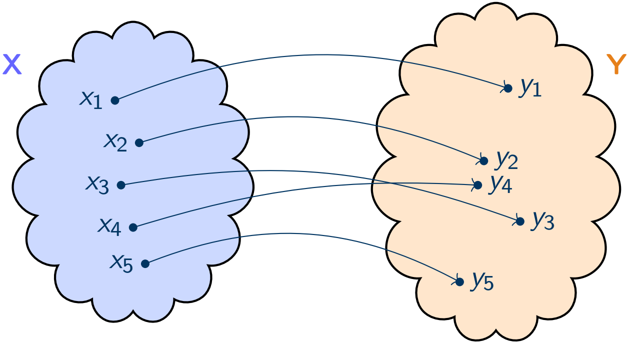
Sie wird oft mit I oder $I_{\mathbf{X}}$ oder id bezeichnet.



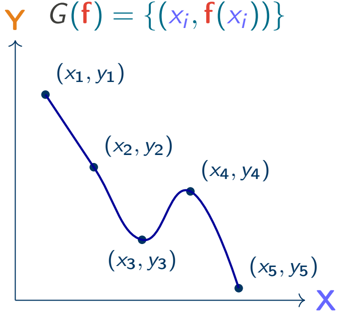
7.1.9 Definition - Graph einer Funktion

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung mit $x \mapsto f(x) = y$. Der **Graph** von f ist die Menge

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$



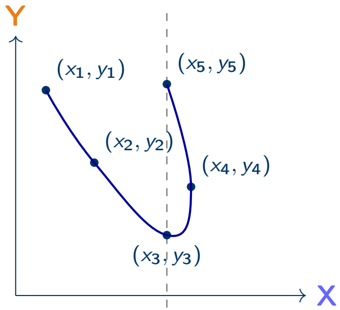
Produktmenge $X \times Y$ mit $G(f)$



7.1.10 Beispiel

Betrachte:

Produktmenge X × Y mit Wertepaaren



Dies ist kein Graph $G(f) = \{(x_i, f(x_i))\}$ einer Funktion f, da es x-Werte gibt, denen zwei y-Werte zugeordnet sind.

7.1.11 Definition - Bild und Urbild einer Funktion

Betrachte eine Abbildung $\mathbf{f}:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ mit $x\mapsto \mathbf{f}(x) = y$.

Sei $\mathbf{A}\subset\mathbf{X}$ Teilmenge des Definitionsbereichs. Das Bild von $\mathbf{A}$ unter $\mathbf{f}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{f}(x) : x\in\mathbf{A}\} \subset \mathbf{Y}.$$

Alternativ können wir auch schreiben $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \{\, y\in\mathbf{Y} : \exists x\in\mathbf{A} \text{ mit } \mathbf{f}(x)=y\,\}$.

Sei $\mathbf{B}\subset\mathbf{Y}$ Teilmenge des Wertebereichs. Das Urbild von $\mathbf{B}$ unter f^{-1} ist gegeben durch

$$f^{-1}(\mathbf{B}) := \{x\in\mathbf{X} : \mathbf{f}(x)\in\mathbf{B}\} \subset \mathbf{X}.$$

Alternativ können wir auch schreiben $f^{-1}(\mathbf{B}) = \{x\in\mathbf{X} : \exists y\in\mathbf{B} \text{ mit } \mathbf{f}(x)=y\}$.

Das Urbild eines einzelnen Elements $y\in\mathbf{Y}$ ist demnach gegeben durch

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x\in\mathbf{X} : \mathbf{f}(x)=y\} \subset \mathbf{X}.$$

Wir schreiben hier kompakt $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Beispiel - Bild einer Teilmenge

Betrachte die Abbildung $f : \mathbf{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2$.

Sei $\mathbf{A} := [-2, 1] \subset \mathbb{R}$. Berechne das Bild von $\mathbf{A}$:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{A}) &= \{\, x^2 \; : \; x \in [-2,1] \,\} \\
&= \{\, y \geq 0 \; : \; y = x^2 \text{ für ein } x \in [-2,1] \,\} \\
&= [0, 4].
\end{aligned}
$$

Begründung: Auf $[-2, 0]$ ist f monoton fallend, auf $[0, 1]$ monoton steigend.

Minimum bei $x = 0 \;\Rightarrow\; f(0) = 0$, Maximum bei $x = -2 \;\Rightarrow\; f(-2) = 4$.

Beispiel - Urbild einer Teilmenge

Betrachte wieder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2$.

Sei $B := [1, 4] \subset \mathbb{R}$. Berechne das Urbild von B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [1, 4]\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 4\}$$
$$= [-2, -1] \cup [1, 2].$$

Begründung: Die Ungleichung $1 \leq x^2 \leq 4$ liefert zwei Lösungen:
$x \in [1, 2]$ (rechte Seite) oder $x \in [-2, -1]$ (linke Seite).

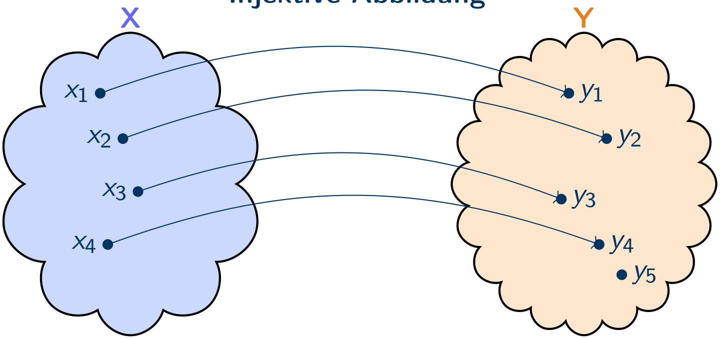
7.1.12 Definition - Injektivität

Ein Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, wenn gilt

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \text{ für } \ x_1, x_2 \in X.$$

Das heißt: Jedes $y \in Y$ besitzt höchstens ein Urbild $x \in X$.

Injektive Abbildung



7.1.12 Definition - Injektivität - Teil 2

Ein Abbildung $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ heißt injektiv, wenn gilt

$$\mathbf{f}(x_1) = \mathbf{f}(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \;\text{ für }\; x_1, x_2 \in \mathbf{X}.$$

Das heißt: Jedes $y \in \mathbf{Y}$ besitzt höchstens ein Urbild $x \in \mathbf{X}$.

Ist $\mathbf{f}$ injektiv so ist $f^{-1} : \mathbf{f}(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ wiederum eine Funktion und wir bezeichnen sie als **Umkehrfunktion** von $\mathbf{f}$.

Erinnerung Urbild:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{ x : \mathbf{f}(x) = y \}$$

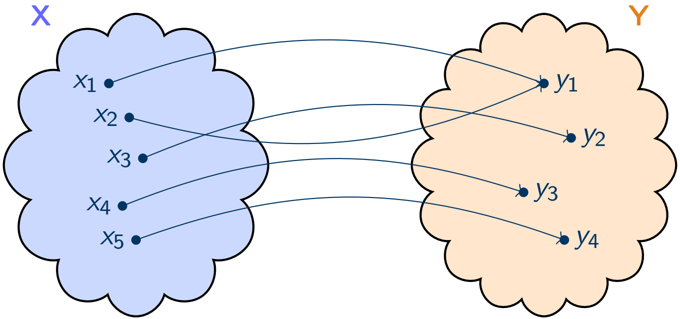
7.1.13 Definition - Surjektivität

Ein Abbildung $f : X \to Y$ heißt surjektiv, wenn gilt

$$f(X) = Y$$

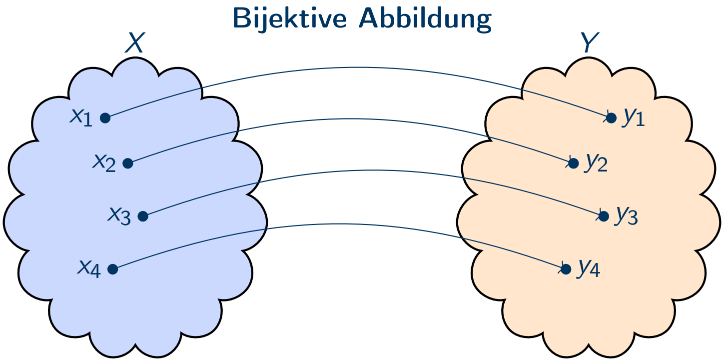
Das heißt: Jedes $y \in Y$ besitzt mindestens ein Urbild $x \in X$.

Surjektive Abbildung (nicht injektiv)



7.1.14 Definition - Bijektivität

Ein Abbildung $f : X \to Y$ heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv zugleich ist.



Das heißt, jedes $y \in Y$ besitzt genau ein Urbild $x \in X$.

Die Umkehrabbildung f^{-1} existiert damit auf Y.

7.1.15 Beispiel - Teil 1

- Injektiv:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad \text{mit } f(n) = n + 1.$$

- Injektiv:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \qquad \text{mit } f(n) = 2n.$$

- Bijektiv:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \text{mit } f(n) = n + 1.$$

- Surjektiv:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{mit } f(x) = x^2.$$

- Surjektiv:

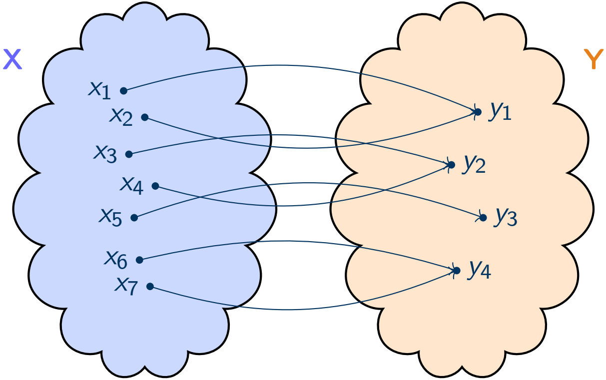
$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \text{mit } f(x) = \sin(x).$$

7.1.15 Beispiel - Teil 2

- Nicht surjektiv und nicht injektiv:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } f(x) = \sin(x).$$

- Surjektiv:



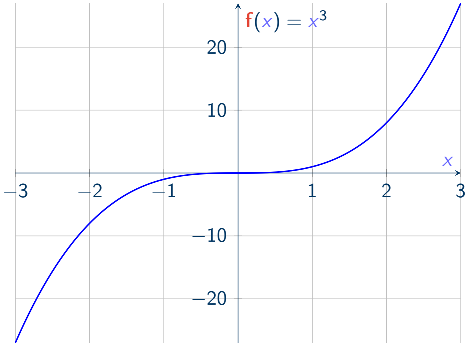
7.1.15 Beispiel - Teil 3

- Bijektiv:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } f(x) = 3x.$$

- Bijektiv:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit } f(x) = x^3.$$



7.1.16 Definition - Komposition von Abbildungen

Für zwei Abbildungen

$$f\colon X \to Y \qquad \text{und} \qquad g\colon Y \to Z$$

ist die Verknüpfung (oder Komposition) von g und f definiert als

$$g \circ f\colon X \to Z, \qquad x \mapsto g(f(x)).$$

7.1.17 Beispiel

Gegeben seien folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = x^2 + 1, \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = \sin(x), \\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad h(x) = x^3 + 2. \end{aligned}$$

Dann ergeben sich folgende Kompositionen:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(\sin(x)) = \sin(x)^2 + 1, \\ (g \circ f)(x) &= g(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1), \\ (f \circ h)(x) &= f(x^3 + 2) = (x^3 + 2)^2 + 1, \\ (h \circ f)(x) &= h(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3 + 2, \\ (g \circ h)(x) &= g(x^3 + 2) = \sin(x^3 + 2), \\ (h \circ g)(x) &= h(\sin(x)) = \sin(x)^3 + 2. \end{aligned}$$

7.1.18 Bemerkung

Beachte: Im Allgemeinen gilt:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Die Voraussetzung für eine Verknüpfung ist, dass der Wertebereich der ersten Abbildung im Definitionsbereich der zweiten liegt.

Das Kommutativgesetz gilt also nicht im Allgemeinen - das Assoziativgesetz hingegen schon.

7.1.19 Definition - Menge von Funktionen

RUB

Auch Funktionen können ihrerseits wieder Elemente von Mengen sein.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$.

Funktionen in $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbb{R})$ haben also alle denselben Definitions- und Wertebereich ($\mathbf{A}$ bzw. $\mathbb{R}$).

$f, g \in \mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbb{R})$ heißen gleich, falls gilt

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbf{A}.$$

Eine Funktion heißt konstant, falls gilt

$$f(x) = C \qquad \text{für ein } C \in \mathbb{R} \text{ und } \forall x \in \mathbf{A}.$$

Elemente von $\mathcal{F}(\mathbf{A}, \mathbb{R})$ kann man selbst wieder aufaddieren und multiplizieren. Es gilt

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Bemerkung

Wir werden später Teilmengen von $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten, z.B. den Raum der Polynome.

Erinnerung: Polynome sind Funktionen der Form

$$\mathbf{f}(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

für einen Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und reelle Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$.

Polynome lassen sich auch auf komplexe Werte erweitern.

7. Funktionen/Abbildungen

7.2 Umkehrfunktion

7.2.1 Definition - Umkehrfunktion

Es sei $f\colon X \to Y$ gegeben.

Eine Abbildung $g\colon Y \to X$ heißt Umkehrfunktion oder Inverse zu f, falls

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \qquad \text{und} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_X$$

gilt.

Wir schreiben wie zuvor $f^{-1} := g$.

7.2.2 Beispiel

(a) Sei $\mathsf{f}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\mathsf{f}(x) \mapsto \sqrt{x}$.

$\Rightarrow$ $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2$ ist Inverse zu f:

$$\mathsf{f} \circ g = \mathsf{f}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

$$g \circ \mathsf{f} = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$\Rightarrow \mathsf{f} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+} = g \circ \mathsf{f}$$

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$:

Hier gibt es keine Umkehrfunktion!

7.2.3 Proposition

RUB

Es sei $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann gilt:

$$f \text{ besitzt eine Inverse} \iff f \text{ ist bijektiv.}$$

7.2.4 Beweis - "$\Rightarrow$"

Wir zeigen: "Besitzt f eine Inverse, so ist f bijektiv".

"$\Rightarrow$": Sei $g : \mathsf{Y} \to \mathsf{X}$ eine Inverse zu f.

Injektivität: Es seien $x_1, x_2 \in \mathsf{X}$ mit $\mathsf{f}(x_1) = \mathsf{f}(x_2)$. Dann gilt:

$$x_1 = (g \circ \mathsf{f})(x_1) = g(\mathsf{f}(x_1)) = g(\mathsf{f}(x_2)) = (g \circ \mathsf{f})(x_2) = x_2.$$

$\Rightarrow$ f ist injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \mathsf{Y}$, dann ist $g(y)$ ein Urbild von y unter f, denn:

$$\mathsf{f}(g(y)) = (\mathsf{f} \circ g)(y) = y.$$

$\Rightarrow$ f ist surjektiv.

$\Rightarrow$ **f ist bijektiv.**

7.2.4 Beweis - "$\Leftarrow$"

Wir zeigen: "Ist f bijektiv, so besitzt f eine Inverse".

"$\Leftarrow$": Sei $f\colon X \to Y$ bijektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$.

Definiere $g\colon Y \to X$ durch $g(y) := x_y$. Dann gilt:

$$(f \circ g)(y) \;=\; f(x_y) \;= y.$$

Es bleibt zu zeigen: $(g \circ f)(x) = x$.

Jedes $x \in X$ ist von der Form $x = x_y$ für ein $y \in Y$. Dann folgt:

$$(g \circ f)(x) \;=\; (g \circ f)(x_y) \;=\; g(y) \;=\; x_y \;=\; x.$$

$\blacksquare$