Vorkurs

Karin Baur

Die Unterlagen für die Wochen drei und vier vom Vorkurs der Fakultät für Mathematik.
Vorlesungen jeweils 10:15-11:45.
Woche 3: 15.9-17.9: HID; 18.9: HGA 10; 19.9: HIC
Woche 4: 22.9-26.09: HIC

Karin Baur
Bochum

Ruhr-Universität Bochum
E-mail address: karin.baur@rub.de.
Date: 16. September 2025.

Kapitel 8. Primzahlen 3
8.1. Zahlenbereiche 3
8.2. Beweisstrategien 3
8.3. Primzahlen und Teilbarkeit 4
8.4. Auffinden einer PFZ in der Praxis 5
Kapitel 9. Mächtigkeit von Mengen 7
9.1. “Grössenvergleiche” von Mengen 7
Kapitel 10. Polynome 9
10.1. Erste Begriffe 9
10.2. Polynomgleichungen - Auffinden von Nullstellen 9
10.3. Der Fundamentalsatz der Algebra 11
Kapitel 11. Die Exponentialfunktion 12
Kapitel 12. Die Ableitung 13
Kapitel 13. Ableitung und Integral 14
Kapitel 14. Differentialgleichungen 15

Kapitel 8. Primzahlen

[Vorlesung Mo 15.9.2025]

8.1. Zahlenbereiche.

	$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
	natürliche Z.		ganze Z.		rationale Z.		reelle Z.		komplexe Z.
Operationen	Addition, Multiplikation		Subtraktion		Division durch $y \neq 0$		$\sqrt{x}, x \geq 0$ $e^x, \log x$		$\sqrt{-1}, \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{C}$ beliebig

Zur Notation: $\mathbb{N}$ bezeichnet oft die positiven ganzen Zahlen, manchmal ist 0 mitgemeint. Und manchmal schreiben wir $\mathbb{N}_0$ für $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

BEMERKUNG 8.1.1. (1) Die Inklusionen sind strikt - Beispiele dazu?

(2) Zu den Erweiterungen: Beispiele von Gleichungen, die nicht lösbar sind und für die wir zu einem "grösseren" Bereich gehen müssen.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: die Gleichung $x+2=0$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$.
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: $2x+1=0$ nicht lösbar in $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: $x^2=2$ nicht lösbar in $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: $x^2=-1$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$.

(3) Die ersten vier Zahlenbereiche sind geordnet, wir können je zwei Elemente von ihnen immer mit $\leq$ vergleichen. Der Zahlenbereich $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet.

(4) Die letzten drei sind sogenannte Körper: Körper werden später behandelt, in der linearen Algebra. Kurz gesagt: wir können addieren und subtrahieren, es gibt ein neutrales Element dafür, die 0. Wir können multiplizieren und durch Element $\neq 0$ teilen, es gibt ein neutrales Element dafür, die 1. Addition und Multiplikation sind kommutativ (es gilt $a+b=b+a$ für alle a,b und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle a,b) und es gelten die Distributivgesetze $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$, für alle a,b,c im jeweiligen Bereich.

8.2. Beweisstrategien. Wir werden oft die folgenden Beweisstrategien verwenden:

- Vollständige Induktion
- direkter Beweis
- Widerspruchsbeweis

Ein Beispiel eines Widerspruchsbeweises geben wir beim Beweis der folgenden Aussage.

Proposition 8.2.1. *Die Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ist nicht rational.*

BEWEIS. Annahme: $\sqrt{2}$ liegt in $\mathbb{Q}$. Dann gibt es $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, mit

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}. \tag{8.1}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass m,n teilerfremd ist (also, dass $\mathrm{ggT}(m,n)=1$ gilt). Wir können (8.1) umformen (quadrieren, umstellen) und erhalten daraus:

$$2n^2 = m^2. \tag{8.2}$$

Aus (8.2) folgt, dass m^2 gerade sein muss. Und daraus wiederum, dass m gerade sein muss (wäre m ungerade, so wäre auch m^2 ungerade). Also können wir m schreiben als $m=2m'$ mit einem $m' \in \mathbb{Z}$ (das auch ganzzahlig ist). Wir setzen $m=2m'$ in (8.2) ein und erhalten:

$$2n^2 = m^2 \iff 2n^2 = (2m')^2 \iff 2n^2 = 4(m')^2 \iff n^2 = 2(m')^2.$$

Analog wie oben sagt das, dass n^2 gerade sein muss, also muss auch n gerade sein.

Dann sind sowohl m als auch n gerade, also beide ein Vielfaches von 2, bzw. sind beide durch 2 teilbar. Das ist ein Widerspruch dazu, dass sie teilerfremd sind. Daher kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein. □

8.3. Primzahlen und Teilbarkeit.

Definition 8.3.1. Eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ (bzw. $k \in \mathbb{Z}$) *teilt* die Zahl $n \in NN$ (bzw. $n \in \mathbb{Z}$) geschrieben als $k \mid n$, falls $l \in \mathbb{N}$ (bzw. $l \in \mathbb{Z}$) existiert mit $k \cdot l = n$.

Definition 8.3.2. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heisst *prim* (oder *Primzahl*), falls sie genau zwei Teiler in $\mathbb{N}$ hat. Diese Teiler sind dann n und 1 (und $n \neq 1$). Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Beispiel 8.3.3. Die Zahl 3 hat in $\mathbb{Z}$ vier Teiler $1, -1, 3, -3$. Und in $\mathbb{N}$ hat sie genau zwei Teiler, 1 und 3.

Satz 8.3.4 (Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt Primzahlen $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{P}$ und natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$, so dass*

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_l^{n_l} \tag{8.3}$$

Dabei ist $l \in \mathbb{N}$ und die p_i sind paarweise verschieden (d.h. $p_i \neq p_j$ falls $i \neq j$).

Eine Darstellung von n wie in (8.3) nennt man auch die *(eindeutige) Primfaktorzerlegung (PFZ) von n*.

Vor dem Beweis ein Hinweis: Satz 8.3.4 hat zwei Aussagen: einerseits die Existenz einer Zerlegung in Primfaktoren und andrerseits ihre Eindeutigkeit. Wir werden beide zeigen.

Beweis. (1) Zur Existenz: wir zeigen sie mit Induktion über n.
I.A. Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1, 2, 3$ (müsste man nur für $n = 1$ überprüfen...) .
I.V. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass n eine PFZ besitzt.
I.S. Wir betrachten $n+1 \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass auch $n+1$ eine PFZ besitzt. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

(i) $n+1$ ist prim. Dann ist $p_1 = n+1$, $n_1 = 1$ und die gewünschte Zerlegung in Primfaktoren ist gerade $n+1 = p_1$.
(ii) $n+1$ ist nicht prim. Dann existieren $b, k \in \mathbb{N}$ mit $1 < b, k < n+1$ und $n+1 = b \cdot k$. Da $b, k \leq n$ gilt, besitzen die beiden eine Primfaktorzerlegung. Etwa $b = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l}$ und $k = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$, wobei die p_i und die q_j alle in $\mathbb{P}$ sind, die n_i, m_j alle in $\mathbb{N}$ und $l, r \in \mathbb{N}$.

Wir multiplizieren die beiden zusammen. Unter den Faktoren p_i von b und den Faktoren q_j von k können gewisse in beiden auftreten, wir können diese zusammenfassen und das Produkt dann neu schreiben (ganz rechts):

$$n+1 = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l} \cdot q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r} = \tilde{p}_1^{b_1} \cdots \tilde{p}_t^{b_t}$$

mit $\tilde{p}_i$ Primzahlen, $b_i \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$.

(2) Zur Eindeutigkeit von (8.3): wir können dies mit einem Widerspruchsbeweis zeigen. Hier die Beweisidee.

Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen,

$$n = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l} = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$$

wobei die p_i, q_j alle prim sind, die Faktorisierungen nicht die gleichen sind (auch nach Umnummerierung), $l, r \in \mathbb{N}$ sowie $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ gelten.

In $\mathbb{N}$ sind die Zahlen wohlgeordnet, wir können also das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit zwei verschiedenen Faktorisierungen wählen.

(i) Zuerst argumentieren wir, dass $\{p_1, \ldots, p_l\} \cap \{q_1, \ldots, q_r\} = \emptyset$ gilt (es gibt keine gemeinsamen Faktoren in den beiden Faktorisierungen). Gäbe es ein i, $1 \leq i \leq l$ und ein j, $1 \leq j \leq r$ mit $p_i = q_j$, dann wäre $\frac{n}{p_i} = \frac{n}{q_j}$ auch in $\mathbb{N}$ und hätte ebenfalls zwei verschiedene PFZ. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass n minimal ist mit dieser Eigenschaft. Also sind die beiden Mengen disjunkt.

(ii) Jeder Faktor p_i in n teilt n. Insbesondere teilt p_1 die Zahl n. Und das $n = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$ gilt, haben wir auch $p_1 \mid q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$. Da p_1 und die q_j alle prim sind, geht das nur, wenn p_1 einer der Faktoren $q_1, \ldots, q_r$ ist. Das ist ein Widerspruch zu (i).

□

Beispiele 8.3.5. So ist etwa $12 = 2^2 \cdot 3$, also $l = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ und $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, mit $l = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$.

[Vorlesung Di 16.9.2025]

Theorem 8.3.6 (Satz von Euklid)**.** *Die Menge $\mathbb{P}$ ist unendlich.*

Wir können einen Widerspruchsbeweis führen.

Beweis. Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen, also $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_l\}$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Zahl $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_l + 1$. Es ist $n > p_i$ für jedes i. Daraus folgt: $n \notin \mathbb{P}$.

Ausserdem ist $n \in \mathbb{N}$, nach Satz 8.3.4 besitzt also n eine Zerlegung in Primfaktoren. D.h. unter den (endlich vielen) Primzahlen gibt es welche, die n teilen. Sagen wir, $p_j \mid n$, wobei $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = k \cdot p_j$. Es folgt:

$$\begin{aligned} n &= pp_1 \cdots p_l + 1 = kp_j \\ \Longrightarrow \quad & k \cdot p_j - p_1 \cdots p_l = 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underbrace{p_j}_{>1} \underbrace{(k - p_1 \cdots p_{j-1} \cdot p_{j+1} \cdots p_l)}_{\neq 0} = 1 \end{aligned}$$

In dem Term auf der linken Seite ist $p_1 > 1$ und der Faktor $(k - p_2 \cdots p_l)$ ist betragsmässig ≥ 1. Ihr Produkt kann also nicht gleich 1 sein und wir haben einen Widerspruch. □

8.4. Auffinden einer PFZ in der Praxis. Teilbarkeitstests helfen dabei. Für kleine Primzahlen sind das die folgenden:

Die Zahl n ist teilbar

- durch 2, wenn die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung durch 2 teilbar ist,
- durch 3, wenn die Quersumme der Ziffern durch 3 teilbar ist,
- durch 5, wenn die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung durch 5 teilbar ist,
- durch 7, wenn die Zahl $a - 2b$ durch 7 teilbaar ist, wobei a die Zahl ist, die durch streichen der letzten Dezimalziffer von n entsteht und b die letzte Dezimalziffer von n ist (siehe Satz 8.4.2 unten),
- durch 11, wenn...(die alternierende Summe der Ziffern 0 ist)?
- durch 9, wenn...? durch 6, wenn... ? Warum ist es nicht nötig, 6und 9 zu betrachten?

Beispiel 8.4.1. Wir illustrieren den Test für $p = 7$. Sei $n = 343$. Dann ist $a = 34$ und $b = 3$.

$$\begin{aligned} a - 2b & \\ &= 34 - 2 \cdot 3 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Die Zahl 28 ist durch 7 teilbar, also ist (nach Satz 8.4.2) auch n durch 7 teilbar.

Satz 8.4.2. *Es sei $n = 10a + b$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Dann gilt:*

$$7 \mid n \Longleftrightarrow 7 \mid a - 2b.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} 7 \mid n &\iff 7 \mid (10a + b) && \text{subtrahieren } 7a \\ &\iff 7 \mid (3a + b) && \text{multiplizieren mit } 5 \\ &\iff 7 \mid (15a + 5b) && \text{subtrahieren } 14a\text{, sowie } 7b \\ &\iff 7 \mid (a - 2b) \end{aligned}$$

□

Zwei Bemerkungen zum Beweis von Satz 8.4.2:
Zur ersten Umformung (Subtraktion von Vielfachen von 7): Ist eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so ist $m - 7a$ genauso durch 7 teilbar, da $7a$ ein Vielfaches von 7 ist. Und umgekehrt: sind m, a in $\mathbb{N}$ und ist $m - 7a$ durch 7 teilbar, so ist auch m durch 7 teilbar. Analog für die dritte Umformung.

Zur zweiten Umformung: ist eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so ist auch $5m$. Und umgekehrt: ist ein Vielfaches von 5, sagen wir $5x$, mit $x \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar, so auch x selbst durch 7 teilbar. Das geht, weil 5 und 7 verschiedene Primzahlen sind.

Kapitel 9. Mächtigkeit von Mengen

Zur Abkürzung schreiben wir $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

9.1. "Grössenvergleiche" von Mengen.

Definition 9.1.1. Es sei A eine Menge.

- Die Menge A ist *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : A \to [n]$ gibt. Die Zahl n heisst dann die *Mächtigkeit* oder die *Kardinalität von A*.
- Eine Menge A heisst *unendlich*, falls A nicht endlich ist. Die Menge A heisst abzählbar unendlich, falls es eine Bijektion $f : A \to \mathbb{N}$ gibt.
- Eine Menge A heisst *überabzählbar*, falls sie unendlich und nicht abzählbar unendlich ist. Die Menge A heisst *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Beispiele 9.1.2. Die Mengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ sind alle abzählbar, auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Die Mengen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind überabzählbar.

Bemerkung 9.1.3. Sind A, B endliche Mengen, so haben wir folgende Grössenvergleiche:

$$\begin{aligned} |A| = |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ bijektiv}, \\ |A| \leq |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ injektiv}, \\ |A| \geq |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ surjektiv}. \end{aligned}$$

Wir können dies verallgemeinern zu einer Definition.

Definition 9.1.4. Seien A, B zwei beliebige Mengen (endlich oder unendlich). Wir schreiben

$$\begin{aligned} |A| = |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ bijektiv}, \\ |A| \leq |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ injektiv}, \\ |A| \geq |B| &\iff \exists\, f : A \to B \text{ surjektiv}. \end{aligned}$$

Bemerkung 9.1.5. Zurück zu Beispiel 9.1.2 (ohne Beweise):

- Es ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0|$, denn die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n+1$, ist eine Bijektion.
- Es ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, denn die Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, die definiert ist durch

$$g(n) = \begin{cases} k-1 \text{ falls } n \text{ gerade ist, } n = 2k \\ -k \text{ falls } k \text{ ungerade ist, } n = 2k-1. \end{cases}$$

  ist eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

  Man kann die Abbildung g zur Illustration auf $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ anwenden, um sich zu überzeugen, dass wirklich alle ganzen Zahlen erreicht werden.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$g(n)$	-1	0	-2	1	-3	2	-4	...

- Man kann eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finden, um $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ zu zeigen.

  Für $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$: es ist klar, dass $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ ist (wieso? man kann die natürlichen Zahlen in $\mathbb{Q}$ "einbetten"). Um zu sehen, dass $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ gilt: Die Darstellungen als Bruch können dabei benutzt werden (Satz von Cantor-Bernstein-Schröder, "Diagonalabzählen" - nicht gekürzte Brüche werden übersprungen). Siehe Abbildung 1. Man kann die positiven Brüche durchzählen, indem man bei $1 = \frac{1}{1}$ anfängt und dann sukzessive den Pfeilen nach durchgeht.

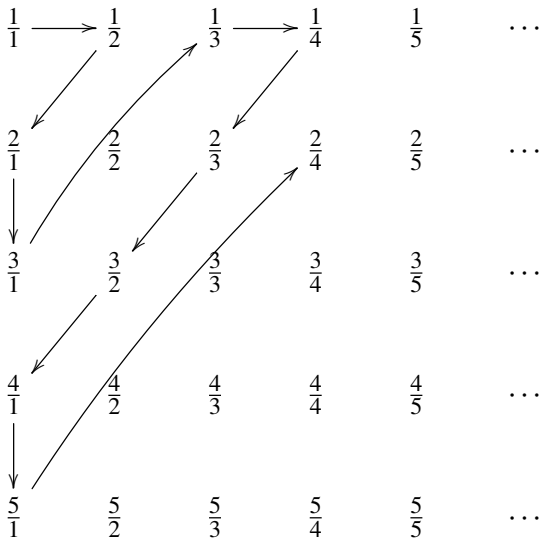

ABBILDUNG 1. Die Brüche können mit $\mathbb{N}$ abgezählt werden.

Kapitel 10. Polynome

[Vorlesung Mi 17.9.2025]

10.1. Erste Begriffe.

Definition 10.1.1. Ein *Polynom vom Grad* $d \in \mathbb{N}_0$ *mit Koeffizienten in* $\mathbb{R}$ ist ein Ausdruck der Form

$$a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{10.1}$$

wobei x die Variable ist, $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten mit $a_d \neq 0$. Wir schreiben $\mathbb{R}[x]$ für die Menge der Polynome (in der Variablen x) mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

Ausdruck	Ein Polynom?	Grad des Polynoms
$5x^2+1$	ja	2
$3x^4-2x+15$	ja	4
$\sin(x)+x^2$	nein	–
$2x^2+2^x$	nein	–
15	ja	0

Ein Polynom vom Grad 0 wird *ein konstantes Polynom* genannt.

Bemerkung 10.1.2. Analog definiert man $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ als die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$. Man kann auch andere Koeffizientenmengen haben (etwa $\mathbb{Z}_3$ oder $\mathbb{Z}_6$ oder als Koeffizienten Polynome in einer anderen Variablen). $\mathbb{R}[t]$ sind die Polynome in t mit reellen Koeffizienten.

Definition 10.1.3. Eine *Polynomfunktion* ist eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder auch andere Zahlenbereiche, z.B. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), so dass ein $p \in \mathbb{R}[x]$ existiert mit $f(x) = p(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.2. Polynomgleichungen - Auffinden von Nullstellen.

Wir schreiben $\deg(p)$ für den Grad des Polynoms p. Sei $p(x) = 0$ eine Polynomgleichung für das Polynom p. Wir beschreiben mögliche Polynomfunktionen vom Grad d und die Lösungen von $p(x) = 0$ für kleine Grade.

- $d = 1$: Es handelt sich um eine *lineare Gleichung*, $ax + b = 0$, mit $a \neq 0$. Ihre Lösung ist $x = -\frac{b}{a}$.
- $d = 2$: Es handelt sich um eine *quadratische Gleichung*, $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a \neq 0$. Deren Lösungen sind

$$x_{1,2} = -\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4ab}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4ab}}{4} - \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$$

  Der Ausdruck $\Delta_2 := (\frac{a}{2})^2 - b$ (oder $\Delta := a^2 - 4ab$) ist die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung.

Die Lösungsformel kann man mittels quadratischem Ergänzen herleiten:

$$\begin{aligned} & x^2+ax+b=0 \\ \iff \quad & x^2+ax+(\frac{a}{2}^2)-(\frac{a}{2}^2)+b=0 \\ \iff \quad & (x+\frac{a}{2})^2=(\frac{a}{2})^2-b \\ & x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{(\frac{a}{2})^2-b} \\ & x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{(\frac{a}{2})^2-b} \end{aligned}$$

- $d=3$: Hier handelt es sich um eine *kubische Gleichung*. Wir können kubische Gleichungen reduzieren, so dass der Term mit x^2 wegfällt und der Koeffizient zu x^3 gerade gleich 1 ist.

  Also können wir annehmen, dass die kubische Gleichung die Form

(10.2) $$x^3+ax+b=0$$

  hat (siehe Bemerkung 10.2.1 unten).

  Für eine solche Gleichung (mit Koeffizient 1 vor x^3 und mit Koeffizient 0 bei x^2) findet man eine Lösung mit dem folgenden Ansatz: man nimmt an, dass $x=u+v$ ist und erhält mit weiteren Umformungen, dass das folgende x eine Lösung ist:

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta_3}}+\sqrt[d]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta_3}},$$

  wobei $\Delta_3:=(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3$ die Diskriminante ist, sowie

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b^2}{2})+(\frac{a}{3})^3} \\ v^3 &= -\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b^2}{2})+(\frac{a}{3})^3}. \end{aligned}$$

  Man kann zeigen, dass die kubische Gleichung für $\Delta_3<0$ drei verschiedene reelle Lösungen hat, für $\Delta_3=0$ zwei reelle Lösungen, wobei eine doppelte Vielfachheit hat und für $\Delta_3>0$ eine reelle, sowie zwei komplex konjugierte Lösungen hat. Man bestimmt dann eine erste Lösung x mit der obigen Formel und kann durch Polynomdivision zu einem Polynom vom Grad zwei übergehen, für das man die Lösungsformel der quadratischen Gleichung nimmt. Im Beispiel 10.2.2 (2) wird das illustriert.

BEMERKUNG 10.2.1. Es sei $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ eine kubische Gleichung. Der Koeffizient a_3 ist nicht Null, denn sonst wäre die Gleichung nicht vom Grad drei. Um ihre Lösungen zu finden, können wir zuerst alle Koeffizienten durch a_3 teilen und erhalten eine ("normierte") Gleichung der Form $x^3+b_2x^2+b_1x+b_3=0$ mit Koeffizienten $b_2=\frac{a_2}{a_3}$, $b_1=\frac{a_1}{a_3}$ und $b_0=\frac{a_0}{a_3}$. Diese kann durch kubische Ergänzung weiter umgeformt werden, so dass der Term mit x^2 verschwindet. Wir definieren

$$y:=x+\frac{b_2}{3}, \quad a:=b_1-\frac{b_2^2}{3} \quad \text{und} \quad b:=\frac{2b_2^3}{27}-\frac{b_2b_1}{3}+b_0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} y^3+ay+b &= (x+\frac{b_2}{3})^3+(b_1-\frac{b_2^2}{3}(x+\frac{b_2}{3})+\frac{2b_2^3}{27}-\frac{b_2b_1}{3}+b_0 \\ &= \overbrace{x^3+3\frac{b_2x^2}{3}+3\frac{b_2^2x}{3^2}+\frac{b_2^3}{3^3}}^{=y^3}+\overbrace{(b_1-\frac{b_2^2}{3})(x+\frac{b_2}{3})}^{=ay}+\overbrace{\frac{2b_2^3}{27}-\frac{b_2b_1}{3}+b_0}^{=b} \\ &= x^3+b^2x^2+\frac{b_2^2x}{3}+\frac{b_2^3}{27}+b_1x+\frac{b_1b_2}{3}-\frac{b_2^2x}{3}-\frac{b_2^3}{9}+\frac{2b_2^3}{27}-\frac{b_2b_1}{3}+b_0 \\ &= x^3+b_2x^2+b_1x+b_0. \end{aligned}$$

Die Gleichung $y^3+ay+b=0$ (mit y,a und b wie oben gewählt) hat also die genau gleichen Lösungen wie die normierte Gleichung $x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=0$.

Beispiel 10.2.2. Wir illustrieren die Lösungsformeln für $d=2,3$.

(1) Grad $d=2$:

$$\begin{aligned} x^2+1 &= 0 \\ &\iff x^2=-1 \\ &\iff x=\pm i \end{aligned}$$

Oder mit der Lösungsformel: $x=0\pm\sqrt{\Delta_2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.

(2) Grad $d=3$: wir betrachten $p(x)=x^3-15x-4=0$, also $a=-15$ und $b=-4$, somit ist $\Delta_3=(\frac{-4}{2})^2-(\frac{15}{3})^3=4-125=-121=-(11^2)$. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} \\ &= (2-i)+(2+i)=4. \end{aligned}$$

(Man kann nachrechnen, dass $(2-i)^3=2+11i$ ist und dass $(2+i)^3=2-11i$ ist.) Durch Polynomdivision findet man $p(x)=(x-4)(x^2+4x+1)$, also sind die weiteren Nullstellen (mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

$$x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}.$$

10.3. Der Fundamentalsatz der Algebra. Die Aussage des Fundamentalsatzes ist die folgende: Jedes nicht-konstante Polynom $p\in\mathbb{C}[x]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, d.h. es existiert $\lambda\in\mathbb{C}$ mit $p(\lambda)=0$.

Was bedeutet das? Was kann man über Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ sagen? In $\mathbb{Q}$?

Kapitel 11. Die Exponentialfunktion

Kapitel 12. Die Ableitung

Kapitel 13. Ableitung und Integral

Kapitel 14. Differentialgleichungen