

4.3 Taylor und Approximation von Funktionen

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Approximation mehrdimensionaler Abbildungen durch Taylorpolynome. Schwerpunkte sind die grafische Ermittlung von Entwicklungspunkten anhand der Graphen der Abbildung und ihrer Approximation und der Bestimmung partieller Ableitungen zur Konstruktion von Taylorpolynomen.

Inhaltsverzeichnis

4.3.1	Taylorpolynom und Entwicklungspunkt	315
4.3.1.1	Entwicklungspunkt (1)	315
4.3.1.2	Entwicklungspunkt (2)	316
4.3.1.3	Entwicklungspunkt (3)	317
4.3.2	Bestimmung von Taylorpolynomen 0. und 1. Grades	318
4.3.2.1	Taylorpolynom 0. Grades (1)	318
4.3.2.2	Taylorpolynom 0. Grades (2)	319
4.3.2.3	Taylorpolynom 1. Grades (1)	320
4.3.2.4	Taylorpolynom 1. Grades (2)	321
4.3.2.5	Taylorpolynom 1. Grades (3)	322
4.3.3	Bestimmung von Taylorpolynomen 2. und höheren Grades	323
4.3.3.1	Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (1)	323
4.3.3.2	Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (2)	325
4.3.3.3	Taylorpolynom 2. Grades (1)	326
4.3.3.4	Taylorpolynom 2. Grades (2)	327
4.3.3.5	Taylorpolynom 2. Grades (3)	328
4.3.3.6	Taylorpolynom n. Grades	329



Dieser Textauszug stammt aus „Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ von Hakim Günther (WH), Tim Inoue (WH), Dr. Michael Kubocz (RWTH), Dr. Benjamin Schulz-Rosenberger (RUB) und Emma van der Smagt (RUB) und steht unter der Lizenz *Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International (CC BY-SA 4.0)*. Die Lizenzbedingungen können unter <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de> eingesehen werden.



4.3.1 Taylorpolynom und Entwicklungspunkt

4.3.1.1 Entwicklungspunkt (1)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot

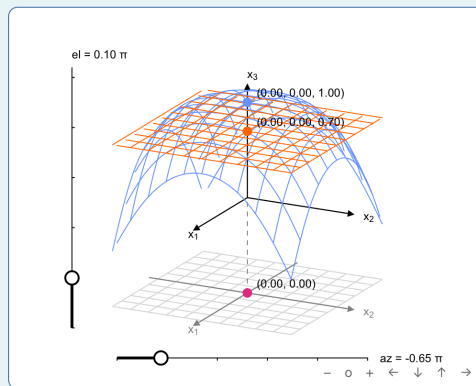
(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y^2 + x^2)$$

und ein Taylorpolynom $T_0 f$ nullten Grades von f .

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f (Graph $\square$) und den Graphen von $T_0 f$ (Graph $\square$) auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt $\bullet$). Die zugehörigen Funktionswerte unter f und T_f werden Ihnen durch Angabe der zugehörigen Punkte auf den Graphen angezeigt (Punkt $\bullet$ bzw. Punkt $\bullet$).



Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung einen Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ des Taylorpolynoms $T_0 f$ von f an. Verschieben Sie dazu das Funktionsargument in der $x_1 x_2$ -Ebene (Punkt $\bullet$) an die Position eines Entwicklungspunktes.

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = T(a(x^{b_1} y^{b_2} + x^{c_1} y^{c_2}))$$

im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.

Vorkenntnisse

Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylorpolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher

Randomisierung

Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a wird zufällig als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 , b_2 und c_1 , c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen gewählt, sodass $b_1 \neq c_1$, $b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ sind. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm \frac{m}{5}, \pm \frac{n}{5})$ mit m gleich 2, 3 oder 4 und n gleich 2, 3 oder 4 gewählt.

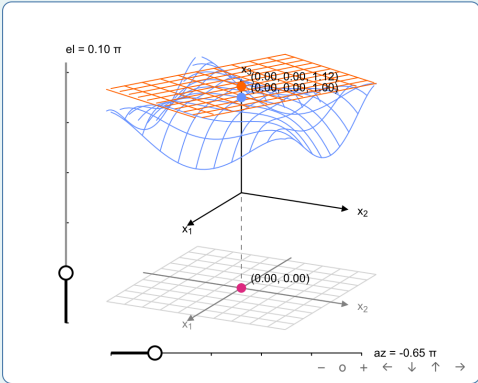
Anpassung

keine

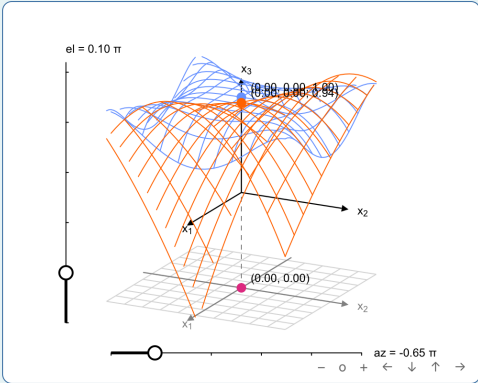
Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

4.3.1.2 Entwicklungspunkt (2)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y^2 - x^2)$ und ein Taylorpolynom $T_1 f$ ersten Grades von f. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f (Graph □) und den Graphen von $T_1 f$ (Graph □) auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Die zugehörigen Funktionswerte unter f und T_f werden Ihnen durch Angabe der zugehörigen Punkte auf den Graphen angezeigt (Punkt ● bzw. Punkt ●). [[jsxgraph input-ref-ans1="stateRef"]]  Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung einen Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ des Taylorpolynoms $T_1 f$ von f an. Verschieben Sie dazu das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene (Punkt ●) an die Position eines Entwicklungspunktes.
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit
	$f(x, y) = T(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$
	im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylorpolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher
Randomisierung	Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a_1 wird als -1 oder 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1, b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm \frac{m}{5}, \pm \frac{n}{5})$ mit m gleich $2, 3$ oder 4 und n gleich $2, 3$ oder 4 gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.1.3 Entwicklungspunkt (3)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y^2 - x^2)$ und ein Taylorpolynom $T_2 f$ zweiten Grades von f. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f (Graph □) und den Graphen von $T_2 f$ (Graph □) auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Die zugehörigen Funktionswerte unter f und T_f werden Ihnen durch Angabe der zugehörigen Punkte auf den Graphen angezeigt (Punkt ● bzw. Punkt ●). [[jsxgraph input-ref-ans1="stateRef"]]  Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung einen Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ des Taylorpolynoms $T_2 f$ von f an. Verschieben Sie dazu das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene (Punkt ●) an die Position eines Entwicklungspunktes.
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = T(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$ im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylorpolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher
Randomisierung	Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a_1 wird als -1 und 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1, b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm \frac{m}{5}, \pm \frac{n}{5})$ mit m gleich $2, 3$ oder 4 und n gleich $2, 3$ oder 4 gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.2 Bestimmung von Taylorpolynomen 0. und 1. Grades

4.3.2.1 Taylorpolynom 0. Grades (1)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y^2 - x y).$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n -ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.

Bestimmen Sie das nullte Taylor-Polynom $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ von f am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und geben Sie $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_0 f((x, y), (0, 0)) =$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = T(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ bestimmt.

Vorkenntnisse

Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a_1 wird als -1 oder 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1, b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizenziert unter

CC BY-SA 4.0

4.3.2.2 Taylorpolynom 0. Grades (2)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

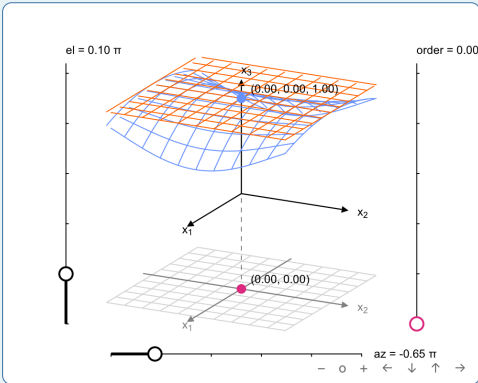
Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(x \cos(y)).$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph $\square$) und den Graphen eines Taylorpolynoms n -ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph $\square$) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt $\bullet$). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt $\bullet$). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider $\circ$) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das nullte Taylor-Polynom $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ von f am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und geben Sie $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_0 f((x, y), (0, 0)) =$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = a_1 S(a_2 x^{b_1} y^{b_2} T(a_3 x^{b_2} y^{b_1}))$$

am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ bestimmt.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Funktionen S und T werden jeweils zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1 , a_2 und a_3 werden jeweils als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 + b_2 = 1$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚dIAM:INT‘“ ist lizenziert unter

CC BY-SA 4.0

4.3.2.3 Taylorpolynom 1. Grades (1)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\sin(3xy - x^2).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n -ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.

Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot, (-6, -2))$ von f am Entwicklungspunkt $(-6, -2)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot, (-6, -2))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_1 f((x, y), (-6, -2)) =$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(a_1 a_2 a_3, -a_3(a_1^2 b_1 \frac{c_2}{2} + a_2^2 b_2 \frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.

Vorkenntnisse

Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Der Vorfaktor a_1 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_1| \leq 3$ gewählt, der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\text{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt und der Faktor a_3 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_3| \leq 5$ gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2, c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2, c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizenziert unter

CC BY-SA 4.0

4.3.2.4 Taylorpolynom 1. Grades (2)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

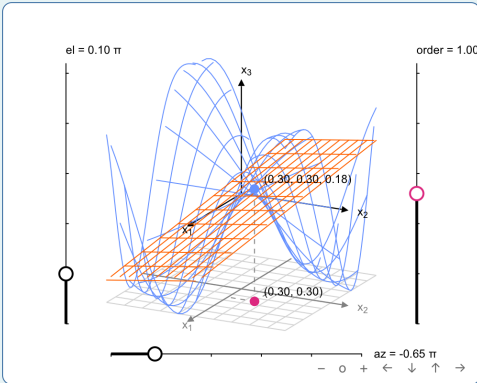
Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(3xy - x^2).$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n -ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot, (-5\sqrt{\pi}, 0))$ von f am Entwicklungspunkt $(-5\sqrt{\pi}, 0)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot, (-5\sqrt{\pi}, 0))$ als Funktion von (x, y) an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sqrt{\pi}$ als `sqrt(%pi)` ein.

Es ist $T_1 f((x, y), (-5\sqrt{\pi}, 0)) =$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(\min\{b_1, c_1\} a_3 \sqrt{\pi}, \min\{b_2, c_2\} a_3 \sqrt{\pi})$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit eine Nullstelle von f ist.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Der Vorfaktor a_1 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_1| \leq 3$ gewählt, der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\text{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt und der Faktor a_3 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_3| \leq 5$ gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2, c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2, c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

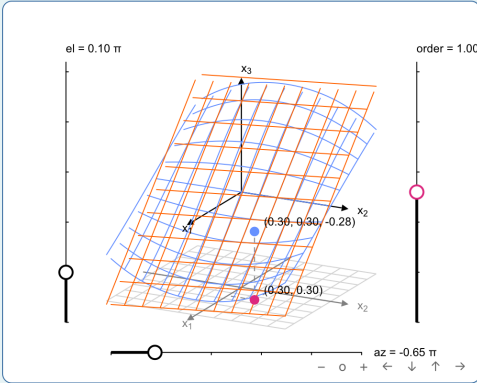
Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚dIAM:INT‘“ ist lizenziert unter

CC BY-SA 4.0

4.3.2.5 Taylorpolynom 1. Grades (3)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\sin(x \cos(y)).$ Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph ☐) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph ☐) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ☐) . Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ☐) . Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ☐) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.  Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot, (\pi, -\pi))$ von f am Entwicklungspunkt $(\pi, -\pi)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot, (\pi, -\pi))$ als Funktion von (x, y) an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sqrt{\pi}$ als <code>sqrt(%pi)</code> ein. Es ist $T_1 f((x, y), (\pi, -\pi)) =$
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit
	$f(x, y) = a_1 S(a_2 x^{b_1} y^{b_2} T(a_3 x^{b_2} y^{b_1}))$
	am Entwicklungspunkt $(\frac{d_1}{c_1} \pi, \frac{d_2}{c_1} \pi)$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil $a_3 x^{b_2} y^{b_1}$ am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Funktion T ist.
Vorkenntnisse	Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen
Randomisierung	Die Funktionen S und T werden jeweils zufällig voneinander verschieden als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1, a_2, a_3, d_1 und d_2 werden jeweils zufällig als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 + b_2 = 1$ gewählt. Die Exponenten c_1 und c_2 werden zufällig positive ganze Zahlen mit $c_1 + c_2 = 3$ gewählt.
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.3 Bestimmung von Taylorpolynomen 2. und höheren Grades

4.3.3.1 Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (1)

Tags

Taylorpolynome, 2D, partielle Ableitungen.

Screenshot

(Stand 07.09.2024)

Gegeben ist die bivariate Funktion

$$f(x, y) = -3 \sin(x) \cosh(y)$$

und der Punkt

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0 \right).$$

(a) Berechnen Sie zuerst die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ und werten Sie diese an der Stelle (x_0, y_0) aus, wobei $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) = f^{(k,l)}(x, y)$ gilt. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(i) $f^{(0,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(ii) $f^{(1,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(iii) $f^{(2,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(iv) $f^{(0,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(v) $f^{(0,2)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(vi) $f^{(1,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(vii) $f^{(1,2)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(viii) $f^{(2,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(b) Geben Sie nun das Taylorpolynom $T_2 f(x, y; x_0, y_0)$ bis einschließlich zweiter Ordnung im Punkt (x_0, y_0) an. Verwenden Sie `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $T_2 f(x, y; x_0, y_0) =$.

Autor

Michael Kubocz (RWTH)

Idee

Michael Kubocz

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

Eine bivariate Funktion, bestehend aus einem Produkt einer $\sin(x)$ - und einer $\cosh(y)$ -Funktion, ist gegeben. In Aufgabenteil (a) werden partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Taylorpolynom bis einschließlich zweiter Ordnung berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter

diff, subst, powerseries, taylor.

Vorkenntnisse

Mehrdimensionale Taylorentwicklung, partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.

Randomisierung

Der Vorfaktor der bivariaten Funktion wird zufällig und als ganzzahlig gewählt. Die x_0 -Koordinate des Entwicklungspunktes wird als ein rationales Vielfaches von π zufällig gewählt.

Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

4.3.3.2 Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (2)

Tags

Taylorpolynome, 2D, partielle Ableitungen.

Screenshot

(Stand 07.09.2024)

Gegeben ist die bivariate Funktion

$$f(x, y) = \frac{8 \exp \{x^2\}}{1 - y}$$

und der Punkt

$$(x_0, y_0) = (0, -5).$$

(a) Berechnen Sie zuerst die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ und werten Sie diese an der Stelle (x_0, y_0) aus, wobei $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) = f^{(k,l)}(x, y)$ gilt. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(i) $f^{(0,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(ii) $f^{(1,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(iii) $f^{(2,0)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(iv) $f^{(0,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(v) $f^{(0,2)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(vi) $f^{(1,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(vii) $f^{(1,2)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(viii) $f^{(2,1)}(x, y) \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$

(b) Geben Sie nun das Taylorpolynom $T_2 f(x, y; x_0, y_0)$ bis einschließlich zweiter Ordnung im Punkt (x_0, y_0) an. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $T_2 f(x, y; x_0, y_0) =$.

Autor

Michael Kubocz (RWTH)

Idee

Michael Kubocz

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

Eine bivariate Funktion, bestehend aus einem Verhältnis einer e -Funktion und einem Polynom ersten Grades, ist gegeben. In Aufgabenteil (a) werden partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Taylorpolynom bis einschließlich zweiter Ordnung berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter

diff, subst, powerseries, taylor.

Vorkenntnisse

Mehrdimensionale Taylorentwicklung, partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.

Randomisierung

Der Vorfaktor der e -Funktion und die y_0 -Koordinate des Entwicklungspunktes wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung

keine

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja.

4.3.3.3 Taylorpolynom 2. Grades (1)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

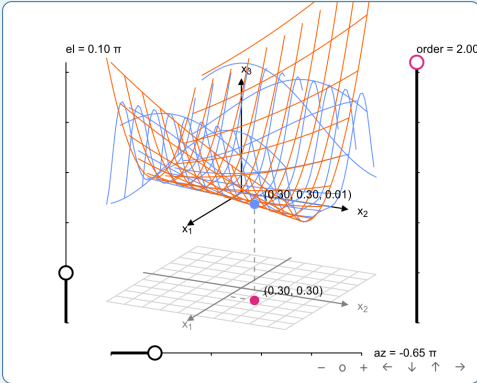
Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin^2(xy - 2x^2).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n -ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom $T_2 f(\cdot, (2, 4))$ von f am Entwicklungspunkt $(2, 4)$ und geben Sie $T_2 f(\cdot, (2, 4))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_2 f((x, y), (2, 4)) =$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin^2(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(a_1 a_2 a_3, -a_3(a_1^2 b_1 \frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden zufällig als ganze Zahlen mit $|a_1| \neq |a_3|$ und $1 \leq |a_i| \leq 2$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\text{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2, c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2, c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizenziert unter

CC BY-SA 4.0



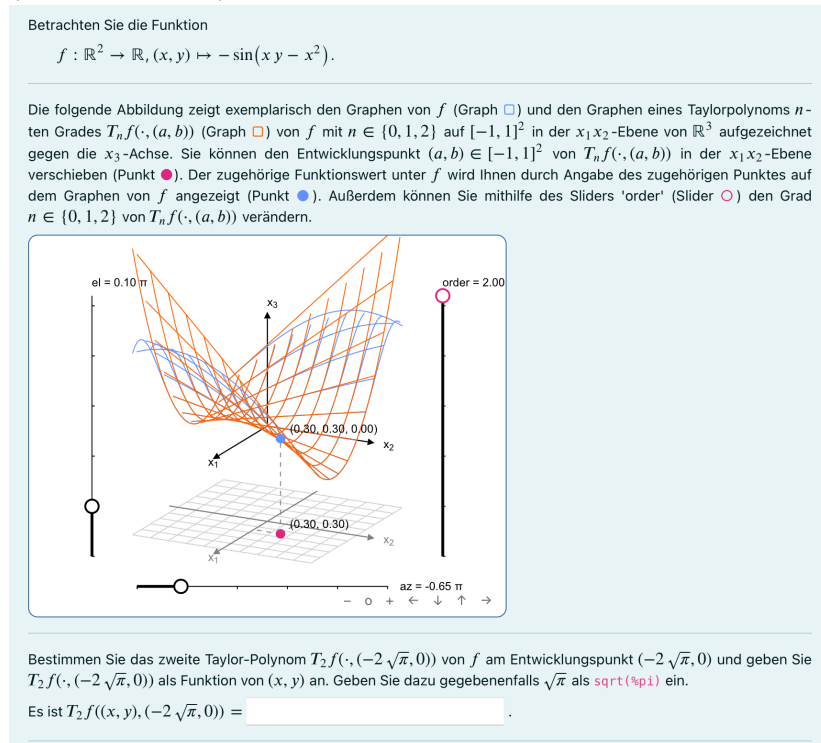
4.3.3.4 Taylorpolynom 2. Grades (2)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot

(Stand 29.07.2024)



Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(\min\{b_1, c_1\} a_3 \sqrt{(\pi)}, \min\{b_2, c_2\} a_3 \sqrt{(\pi)})$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit von f ist.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden zufällig als ganze Zahlen mit $|a_1| \neq |a_3|$ und $1 \leq |a_i| \leq 2$ für alle $i \in \{1, 3\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\text{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2, c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2, c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

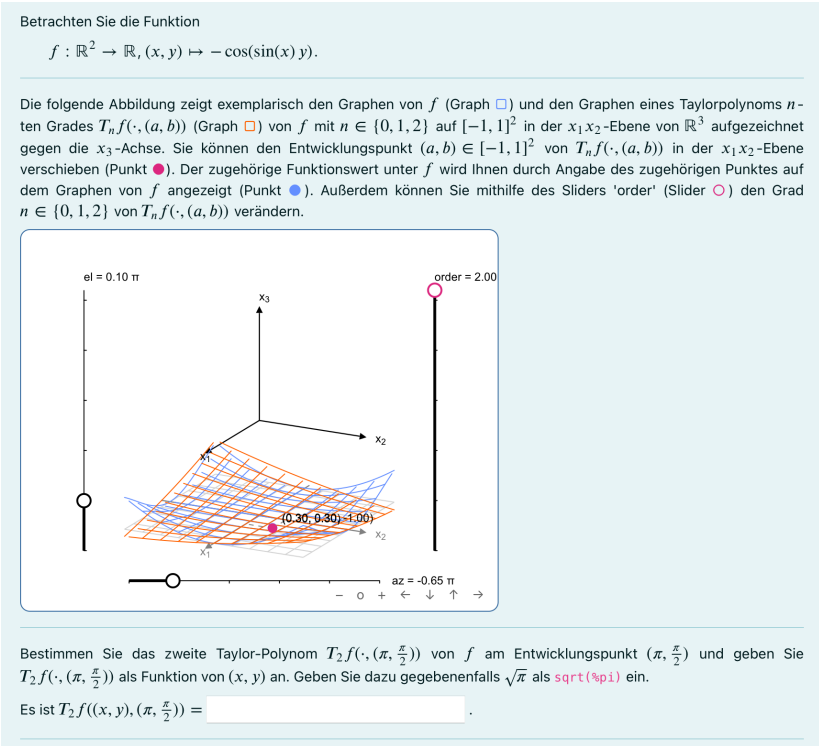
4.3.3.5 Taylorpolynom 2. Grades (3)

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot

(Stand 29.07.2024)



Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = a_1 S(a_2 x^{b_1} y^{b_2} T(a_3 x^{b_2} y^{b_1}))$$

am Entwicklungspunkt $(d_1 (\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2}) \pi, d_2 (\frac{b_2}{c_1} + \frac{b_1}{c_2}) \pi)$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit von f ist.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Funktionen S und T werden zufällig voneinander verschieden als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1, a_2, a_3, d_1 und d_2 werden als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 + b_2 = 1$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

4.3.3.6 Taylorpolynom n. Grades

Tags

Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

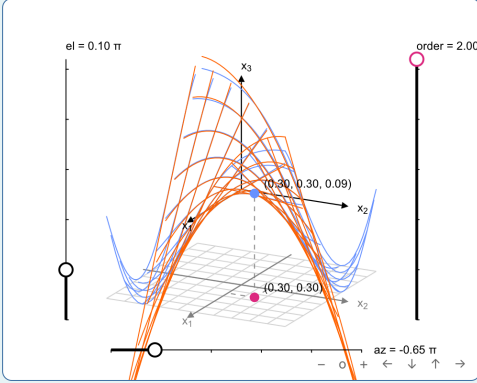
Screenshot

(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (-\sin(y^2 - 2xy))^{n+1}.$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph ☐) für $n = 1$ und den Graphen eines Taylorpolynoms m -ten Grades $T_m f(\cdot, (a, b))$ (Graph ☐) von f mit $m \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$ -Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3 -Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_m f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$ -Ebene verschieben (Punkt ☐). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ☐). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ☐) den Grad $m \in \{0, 1, 2\}$ von $T_m f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das n -te Taylor-Polynom $T_n f(\cdot, (4, 8))$ von f am Entwicklungspunkt $(4, 8)$ und geben Sie $T_n f(\cdot, (4, 8))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_n f((x, y), (4, 8)) =$.

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin^{n+1}(a_1 x^{b_1} y^{b_2} + a_2 x^{c_1} y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(a_1 a_2 a_3, -a_3 (a_1^2 b_1 \frac{c_2}{2} + a_2^2 b_2 \frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.

Vorkenntnisse

Definition des Taylorpolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung

Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden jeweils zufällig als ganze Zahlen mit $2 \leq |a_i| \leq 3$ für alle $i \in \{1, 3\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\text{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2, c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2, c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung

keine

Verbotene Wörter

diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja