4.2 Partielle und totale Ableitung

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die grundlegenden Begriffe, Eigenschaften und Charakterisierungen der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen. Zentrale Themen sind die partielle und totale Differenzierbarkeit, Richtungsableitungen, partielle Ableitungen, das Differential und dessen lokale Darstellung als Jacobimatrix, sowie der Gradient und die Divergenz von Vektorfeldern. Beispiele umfassen komponentenweise polynomielle, exponentielle, trigonometrische und logarithmische Abbildungen, iterierte Kompositionen und Parametrisierungen wie Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

4.2.1 Differenzierbarkeit elementarer Abbildungen

4.2.1.1 Differenzierbarkeit linearer Abbildungen

Tags	Differential, Differenzierbarkeit, Lineare Abbildung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sodass die Abbildung

$$r_a : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m, \; x \mapsto \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|}$$

stetig durch null nach $\{a\}$ fortgesetzt werden kann. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Geben Sie $L(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ an.

Es ist $L =$ ☐.

(b) Um die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung r_a mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen Abbildung L zu beweisen, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt

$$\|r_a(x) - 0\| < \varepsilon.$$

Es ist $\delta =$ ☐.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer linearen Abbildung gezeigt und deren Differential bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.1.2 Differenzierbarkeit bilinearer Abbildungen

Tags	Differential, Differenzierbarkeit, Bilineare Abbildung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ eine bilineare Abbildung. Da f insbesondere stetig ist, existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$\|f(x, y)\| \leq c \cdot \|(x, y)\|^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie dazu eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, sodass die Abbildung

$$r_{(a,b)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{(a, b)\} \to \mathbb{R}^l,\ (x, y) \mapsto \frac{f(x, y) - f(a, b) - L((x, y) - (a, b))}{\|(x, y) - (a, b)\|}$$

stetig durch null nach $\{(a, b)\}$ fortgesetzt werden kann. Geben Sie $L(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ an.

Es ist $L(x, y) =$ ______.

(b) Um die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung $r_{(a,b)}$ mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen Abbildung L zu beweisen, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{(a, b)\}$ mit $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ die Ungleichung

$$\|r_{(a,b)}(x, y) - 0\| < \varepsilon.$$

erfüllt ist. Geben Sie dabei ε als `epsilon` ein.

Es ist $\delta =$ ______.

▸ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer bilinearen Abbildung gezeigt und deren Differential bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.2 Differential elementarer Abbildungen

4.2.2.1 Differential einer bilinearen Abbildung (1)

Tags Differential, Bilineare Abbildung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

> Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie die Funktion
>
> $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot L(y),$
>
> die zwei Vektoren x und y auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(y)$ von x und $L(y)$ abbildet.
>
> Bestimmen Sie das Differential $Df(x, y)(v, w)$ von f am Punkt (x, y) in Richtung (v, w). Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.
>
> Es ist $Df(x, y)(v, w) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Differential einer bilinearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \to (x, y) \mapsto x \cdot L(y)\,,$$

die den Punkt (x, y) auf das Standardskalarprodukt von x und $L(y)$ abbildet, bestimmt. Dabei ist $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine allgemeine lineare Abbildung.

Vorkenntnisse Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen

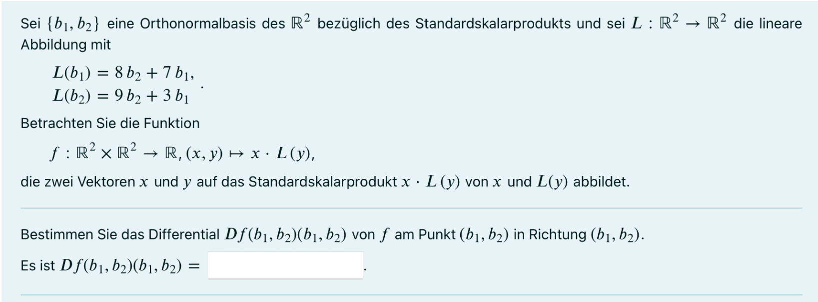
Randomisierung keine

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.2 Differential einer bilinearen Abbildung (2)

Tags	Differential, Bilineare Abbildung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Sei $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts und sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$\begin{aligned} L(b_1) &= 8\,b_2 + 7\,b_1, \\ L(b_2) &= 9\,b_2 + 3\,b_1 \end{aligned}.$$

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot L(y),$$

die zwei Vektoren x und y auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(y)$ von x und $L(y)$ abbildet.

Bestimmen Sie das Differential $Df(b_1, b_2)(b_1, b_2)$ von f am Punkt (b_1, b_2) in Richtung (b_1, b_2).

Es ist $Df(b_1, b_2)(b_1, b_2) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das Differential der bilinearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \to (x, y) \mapsto x \cdot L(y)\,,$$

bestimmt werden, die den Punkt (x, y) auf das Standardskalarprodukt von x und $L(y)$ abbildet. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch Angabe des Bildes einer bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormalen Basis $\{b_1, b_2\}$ definiert. Die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} in den Linearkombinationen

$$L(b_1) = a_{11}\,b_1 + a_{21}\,b_2, \quad L(b_2) = a_{12}\,b_1 + a_{22}\,b_2$$

werden als paarweise verschiedene ganze Zahlen zwischen -9 und 9 gewählt. Das Differential von f soll ausgewertet an Punkten (b_i, b_j) in Richtung (b_k, b_l) mit $i \neq l$ und $j \neq k$ angegeben werden.

Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	Die Wahl der Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} ist zufällig. Die Auswahl der Basisvektoren in den Argumenten des Differetials von f ist zufällig.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.3 Differential einer quadratischen Abbildung

Tags	Differential, Gradient, quadratische Form
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bezüglich des Standardskalarprodukts selbstadjungierte lineare Abbildung. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x),$$

die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet.

(a) Bestimmen Sie das Differential $Df(x)(v)$ von f am Punkt x in Richtung v. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $Df(x)(v) =$ ____ .

(b) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x)$ von f am Punkt x.

Es ist $\operatorname{grad} f(x) =$ ____ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential einer quadratischen Abbildung bestimmt.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.4 Differential der Matrixmultiplikation

Tags	Differential, Matrixmultiplikation
Screenshot	(Stand 29.07.2024) Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, (A, B) \mapsto A \cdot B,$ die zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B auf deren Matrixprodukt $A \cdot B$ abbildet. Bestimmen Sie das Differential $Df(A, B)(X, Y)$ von f am Punkt (A, B) in Richtung (X, Y). Geben Sie dabei das Matrixprodukt $A \cdot B$ als A.B ein. Es ist $Df(A, B)(X, Y) =$.
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential der Matrixmultiplikation bestimmt.
Vorkenntnisse	Differentials mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.3 Richtungsableitung, Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.2.3.1 Richtungsableitung und Stetigkeit

Tags: Richtungsableitung, Stetigkeit

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & x_1^2 = x_2,\ x_1 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In dieser Aufgabe sollen Sie (in mehreren Schritten) zeigen, dass alle Richtungsableitungen von h in Null existieren, aber h in Null nicht stetig und damit insbesondere nicht differenzierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{h(tv)-h(0)}{t-0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist. Geben Sie v_1 und v_2 gegebenenfalls als `v1`, `v2` ein.

Es ist $a_v =$ ______ .

(b) Beweisen Sie die Aussage in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in \,]0, 1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Geben Sie den Betrag einer Zahl z als `abs(z)` ein.

Unterscheiden Sie die folgenden zwei Fälle:

(i) Für $v_1 v_2 \leq 0$ ist $\delta =$ ______ .

(ii) Für $v_1 v_2 > 0$ ist $\delta =$ ______ .

▶ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Geben Sie für alle $\delta \in \,]0, 1[$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $\|x - 0\|_{\max} = \delta$ ist und sodass $|h(x) - h(0)| \geq 1$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|_{\max}$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie δ als `delta` und einen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` ein.

Es ist $x = (x_1, x_2) =$ ______ .

▶ Forderung eines Punkts x mit $\|x - 0\|_{\max} = \delta$
▶ Wahl der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & x_1^2 = x_2,\ x_1 > 0 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bewiesen. Weiterhin soll gezeigt werden, dass die Funktion nicht stetig in null ist.

Vorkenntnisse: Definition und Charakterisierung von Richtungsableitung, Stetigkeit bezüglich der euklidischen Norm und der Maximumsnorm

Randomisierung: Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.2.3.2 Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

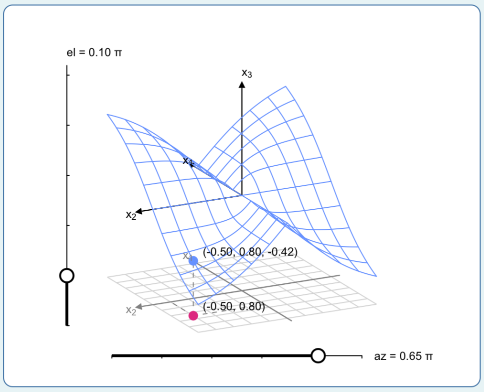
Tags	Richtungsableitung, Differenzierbarkeit
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 |x_2|}{\|x\|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitung von h in null existieren, obwohl h in null nicht differenzierbar ist.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von h auf dem Einheitsquadrat $[-1,1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter h wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto h(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{h(tv)-h(0)}{t-0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist. Geben Sie v_1 und v_2 als `v1`, `v2` und den Absolutbetrag einer Zahl z als `abs(z)` ein. Unterscheiden Sie dazu die folgenden beiden Fälle.

(ii) Für $v = 0$ ist $a_v =$ ______.

(ii) Für $v \neq 0$ ist $a_v =$ ______.

(b) Beweisen Sie die Aussagen in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in \,]0,1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Unterscheiden Sie dazu die folgenden beiden Fälle.

(i) Für $v = 0$ ist $\delta =$ ___.

(ii) Für $v \neq 0$ ist $\delta =$ ___.

▶ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass h differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Funktion h ist ___ differenzierbar in null, da die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v \mapsto a_v$$

___ ___ ist.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion $$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x=(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1\lvert x_2\rvert}{\lVert x\rVert} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ bewiesen. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes bewiesen, dass f in null nicht differenzierbar ist.
Vorkenntnisse	Definition und Charakterisierung von Richtungsableitung, Stetigkeit bezüglich der euklidischen Norm, Differential als lineare Approximation
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

4.2.4.1 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (1/3)

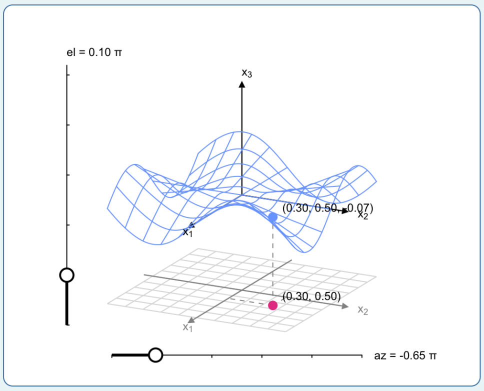
Tags	Differential, Richtungsableitung, partielle Ableitung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{f(tv) - f(0)}{t - 0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist.

Es ist $a_v =$ ______.

(b) Beweisen Sie die Aussage in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in \,]0, 1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Geben Sie ε als `epsilon` und ein die Komponenten v_1, v_2 von v als `v1`, `v2` ein.

(i) Für $v_1^3 v_2 = v_1 v_2^3$ ist $\delta =$ ______.

(ii) Für $v_1^3 v_2 \neq v_1 v_2^3$ ist $\delta =$ ______.

▸ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f am Punkt $x = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:

(i) Für $x = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) =$ ______.

(ii) Für $x = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) =$ ______.

(d) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an Punkten $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(i) Für $x \neq 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) =$ ______.

(ii) Für $x \neq 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion $$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3x_2-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ in null bewiesen. Anschließend werden die partiellen Ableitungen in null und allen anderen Punkten mithilfe der Rechenregeln für partielle Ableitungen bestimmt.
Vorkenntnisse	Richtungsableitung, Kettenregel, Produktregel
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.2 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (2/3)

Tags — Differential, partielle Ableitung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

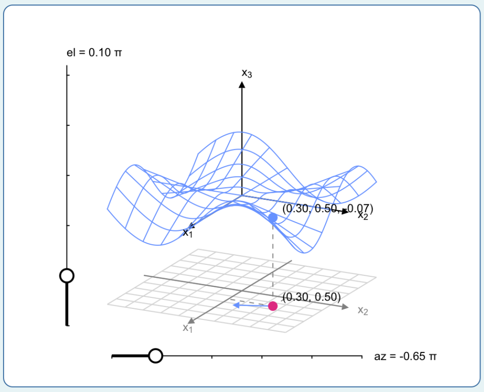
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und deren partielle Differentiale erster Ordnung

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_1\, (x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3)}{(x_2^2 + x_1^2)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_2\, (x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3)}{(x_2^2 + x_1^2)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von g auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter g wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von g ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



(a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung von g stetig in null sind. Geben Sie dazu für jedes beliebige $\varepsilon \in \,]0, 1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ an, sodass

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(0) \right| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x - 0\| < \delta$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie ε als `epsilon` ein.

Unterscheiden Sie die folgenden zwei Fälle:

(i) Für $i = 1$ ist $\delta =$ ______ .

(ii) Für $i = 2$ ist $\delta =$ ______ .

▶ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass g differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Abbildung g ist [ ] differenzierbar in null, da deren [ ] in null [ ] [ ] [ ].

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe wird die Stetigkeit aller Richtungsableitungen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; x(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in null bewiesen. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes bewiesen, dass f in null (stetig) differenzierbar ist.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Kriterium für Differenzierbarkeit in Abhängigkeit der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen, ebene Polarkoordinaten
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.3 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (3/3)

Tags Differential, partielle Ableitung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

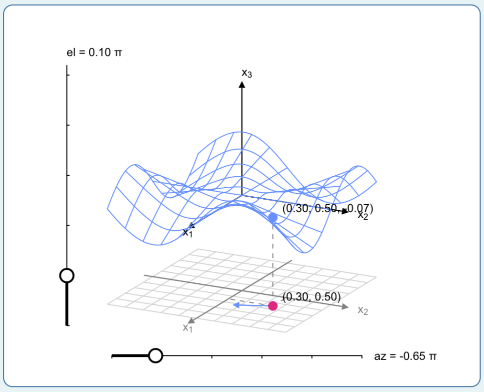
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und deren partielle Differentiale erster Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_1\, (x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3)}{(x_2^2 + x_1^2)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_2\, (x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3)}{(x_2^2 + x_1^2)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



(a) Bestimmen Sie die Komposition der partiellen Ableitung erster Ordnung von f in x_j mit der Kurve $c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto te_i$ am Punkt $t \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichne e_i den i-ten Standardbasisvektor von $\mathbb{R}^2$.

Unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} \circ c_1(t) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} \circ c_2(t) =$ ____.

(iii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_2} \circ c_1(t) =$ ____.

(iv) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_2} \circ c_2(t) =$ ____.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an null.

Unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, 0) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) =$ ____.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) =$ ____.

(iv) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0, 0) =$ ____.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (b), dass f zweimal differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Abbildung f ist ____ zweimal differenzierbar in null, da deren ____ in null ____ ____ ____.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe werden die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3x_2-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ in null als Richtungsableitungen der ersten partiellen Ableitung bestimmt. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes widerlegt, dass f in null zweimal differenzierbar ist.
Vorkenntnisse	Satz von Schwarz, Eigenschaften der Hessematrix, partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, Richtungsableitung
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.4 Allgemeine Gasgleichung 2

Tags — Differenzierbarkeit, partielle Ableitung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Die Allgemeine Gasgleichung (oder Zustandsgleichung idealer Gase)

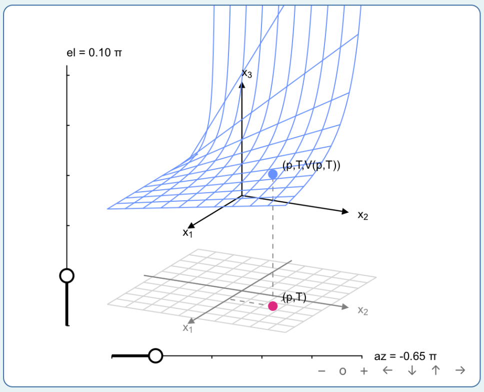
$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

beschreibt, welches Volumen V ein ideales Gas der Stoffmenge n bei einer Temperatur T und einem Druck p einnimmt. Dabei bezeichne R die allgemeine Gaskonstante. Untersuchen Sie V als Funktion

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, (p, T) \mapsto \frac{R\,T\,n}{p}$$

von p und T für Konstanten $n,\ R > 0$.

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von V (Graph □) über einem Quadrat des Definitionsbereichs als Teilmenge der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter V wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Es ist V partiell differenzierbar. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von V an dem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(i) Es ist $\frac{\partial V}{\partial p}(p, T) =$

(ii) Es ist $\frac{\partial V}{\partial T}(p, T) =$

(c) Begründen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass V differenzierbar in jedem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Satz, indem Sie einen geeigneten Satzteil aus den vier angegebenen Satzteilen auswählen.

Es ist V differenzierbar in jedem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, denn alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von V existieren und sind ...

- symmetrisch.
- positiv homogen von Ordnung 1.
- stetig.
- antisymmetrisch.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe wird das durch die Allgemeine Gasgleichung

$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

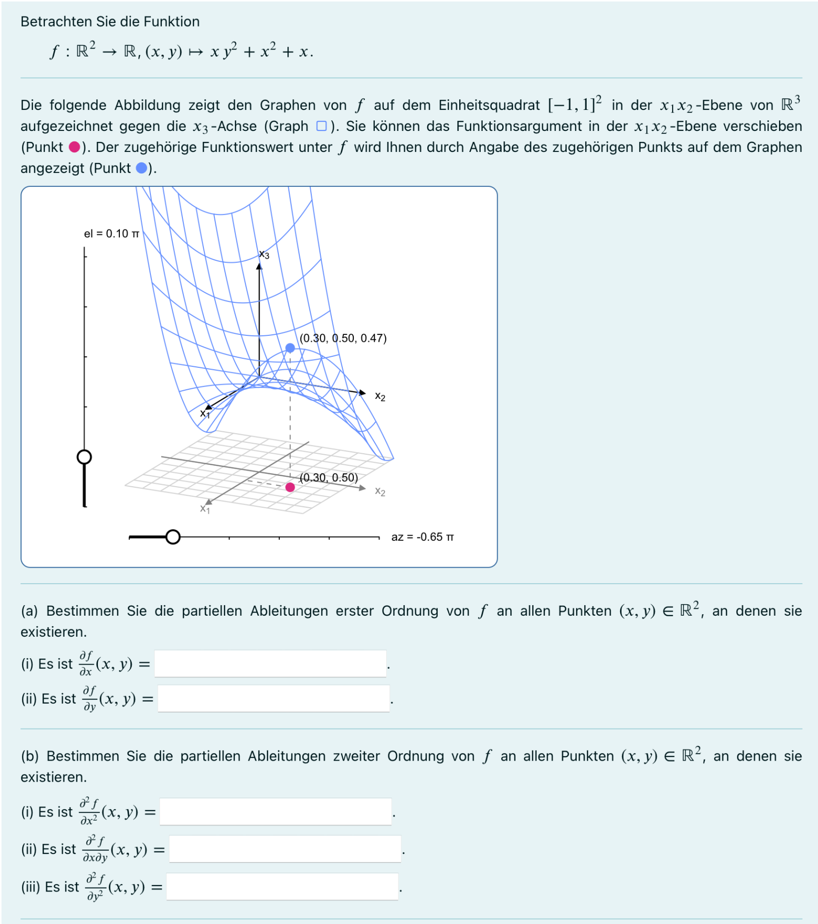
beschriebene Volumen V als Funktion von Druck p und Temperatur T untersucht. In Aufgabenteil (a) sollen die partiellen Ableitungen erster Ordnung bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll durch Ergänzen eines Lückentextes begründet werden, dass V stetig differenzierbar in jedem Punkt des Definitionsbereichs ist.

Vorkenntnisse	Richtungsableitungen, Kriterium für die Differenzierbarkeit einer Abbildung
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja
Bemerkung	Aufgabe 1.1.2.2 behandelt ebenfalls die Allgemeine Gasgleichung im Themenfeld von Äquivalenzumformungen von Gleichungen.

4.2.5 Berechnung von partiellen Ableitungen

4.2.5.1 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (1)

Tags	Richtungsableitung, partielle Ableitung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x\,y^2 + x^2 + x.$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ______.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Jörg Härterich Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen rationale Funktion f dritter Ordnung in zwei Veränderlichen x und y mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form $$f(x, y) = a_3\,x^{b_1}\,y^{b_2} + a_2\,x^{c_{21}}\,y^{c_{22}} + a_1\,x^{c_{11}}\,y^{c_{12}},$$ wobei $a_i \in \{-1, +1\}$, $b_j \in \mathbb{N}$ und $c_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit $$b_1 + b_2 = 3 \quad \text{und} \quad c_{i1} + c_{i2} = i$$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden. Aufgrund der Wahl von b_1 und b_2 ist das Monom dritten Grades stets bivariat.
Vorkenntnisse	Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen Funktionen

Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, $c_{11}, c_2 12, c_{21}, c_{22}$ werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.2 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (2)

Tags Richtungsableitung, partielle Ableitung

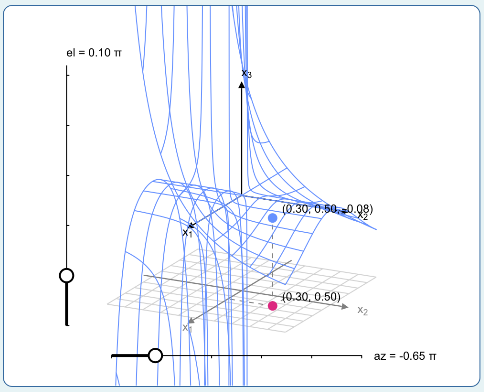
Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto -\frac{x^2\, y}{y+x^2}$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Jörg Härterich

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

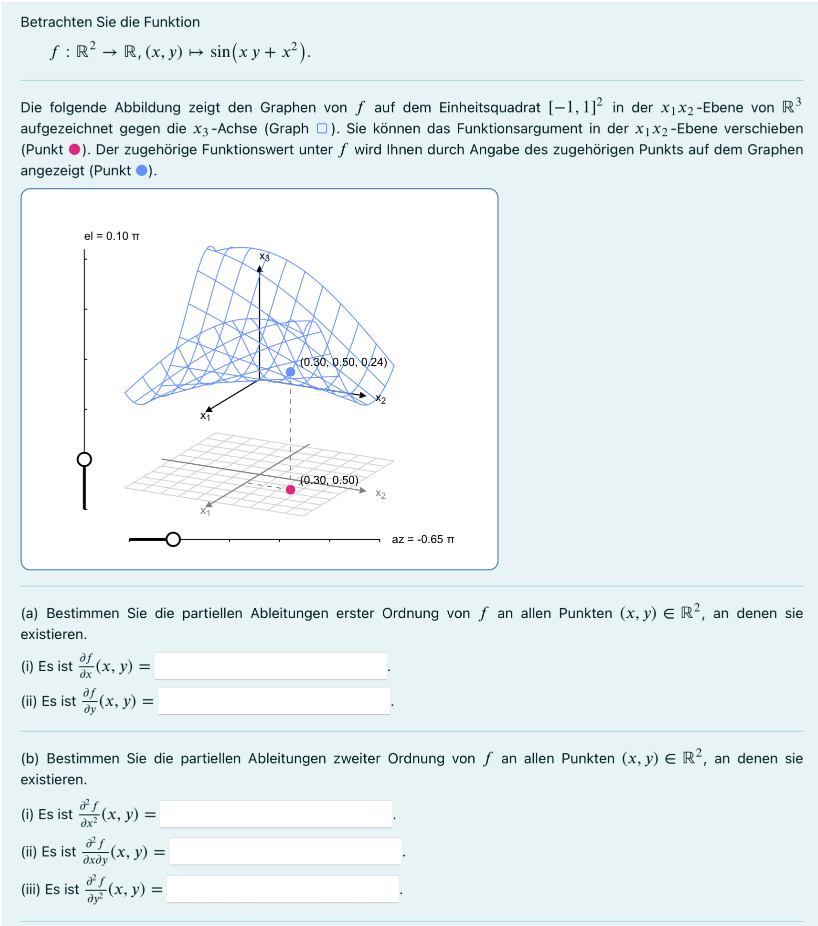
Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen gebrochen-rationalen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form $$f(x,y) = \frac{a_3\, x^{b_1}\, y^{b_2}}{a_2\, x^{c_{21}}\, y^{c_{22}} + a_1\, x^{c_{11}}\, y^{c_{12}}},$$ wobei $a_i \in \{-1,+1\}$, $b_j \in \mathbb{N}$ und $c_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit $$b_1 + b_2 = 3 \quad \text{und} \quad c_{i1} + c_{i2} = i$$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und alle $j \in \{1,2\}$ gewählt werden. Aufgrund der Wahl von b_1 und b_2 ist das Zählerpolynom ein bivariates Monom dritten Grades.
Vorkenntnisse	Partielle Ableitung, Ableiten von gebrochen-rationalen Funktionen
Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, $c_{11}, c_212, c_{21}, c_{22}$ werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.3 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (3)

Tags: Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = g(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}),$$

wobei $g \in \{\cos, \sin\}$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j, c_j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 + b_2 = 2 = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad b_j \neq c_j$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.

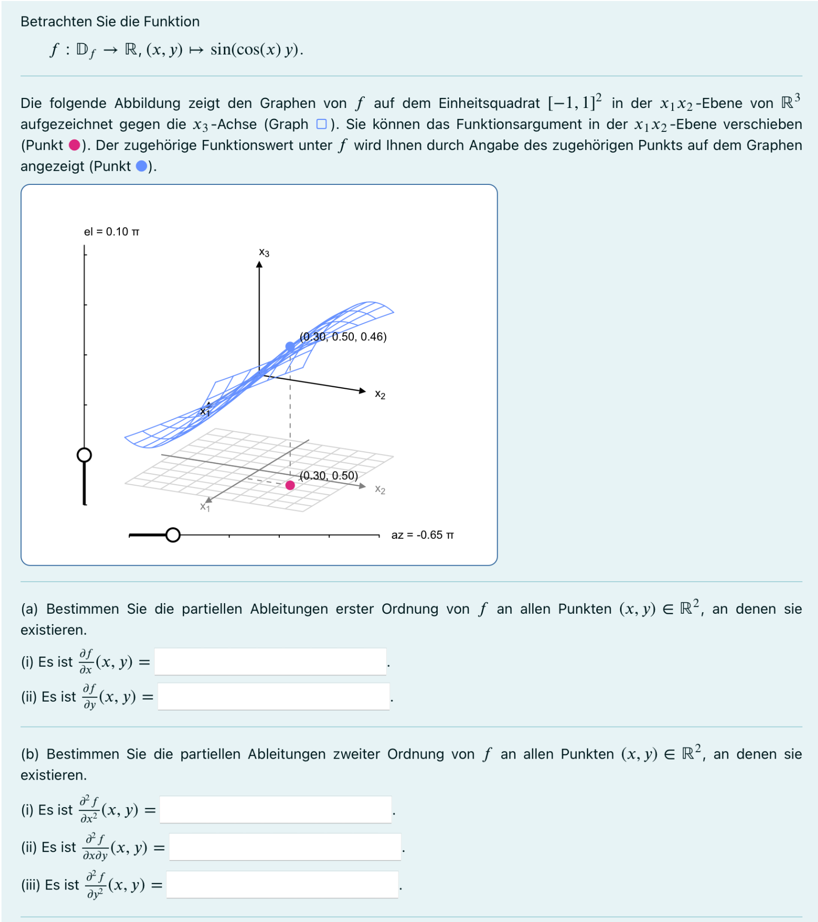
Vorkenntnisse: Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen und trigonometrischen Funktionen

Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, c_1, c_2 werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.4 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (4)

Tags: Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_3\, g(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2}\, h(a_1\, x^{b_2}\, y^{b_1})),$$

wobei $g, h \in \{\cos, \sin\}$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j \in \mathbb{N}_0$ mit $b_1 + b_2 = 1$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.

Vorkenntnisse: Partielle Ableitung, Ableiten von trigonometrischen Funktionen

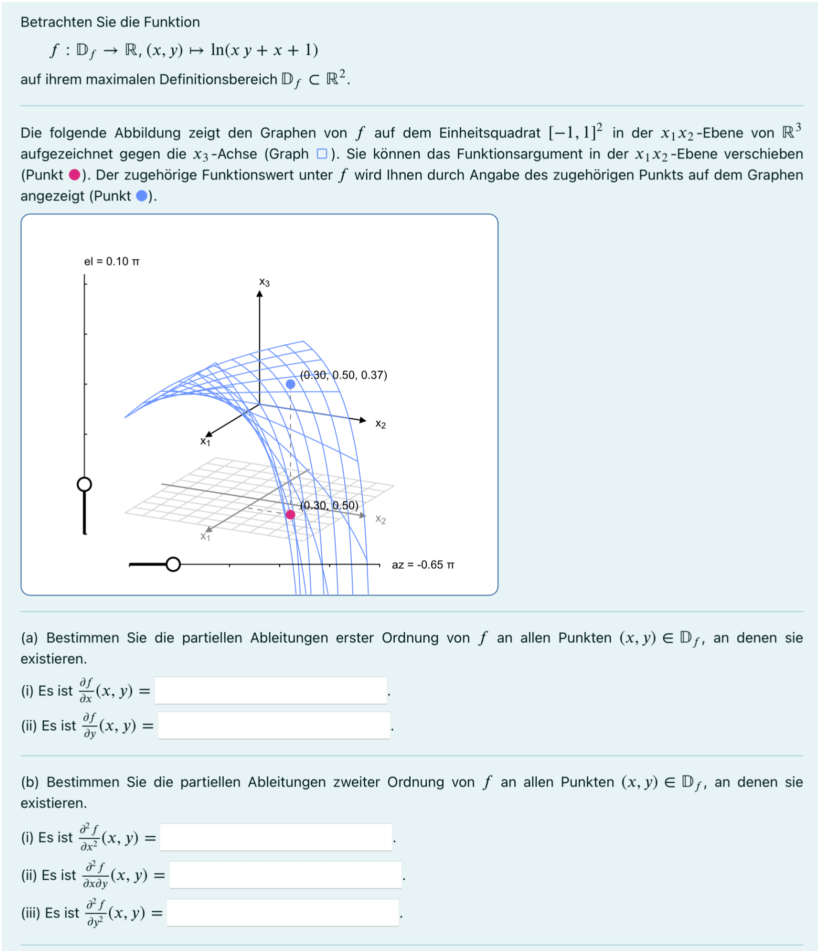
Randomisierung: Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2 werden zufällig ausgewählt.

Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.5 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (5)

Tags: Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \ln(x\,y + x + 1)$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ____.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ____.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ____.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_2 \ln\bigl(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} - a_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}\bigr),$$

wobei $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j, c_j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 + b_2 = 2 = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad b_j \neq c_j$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.

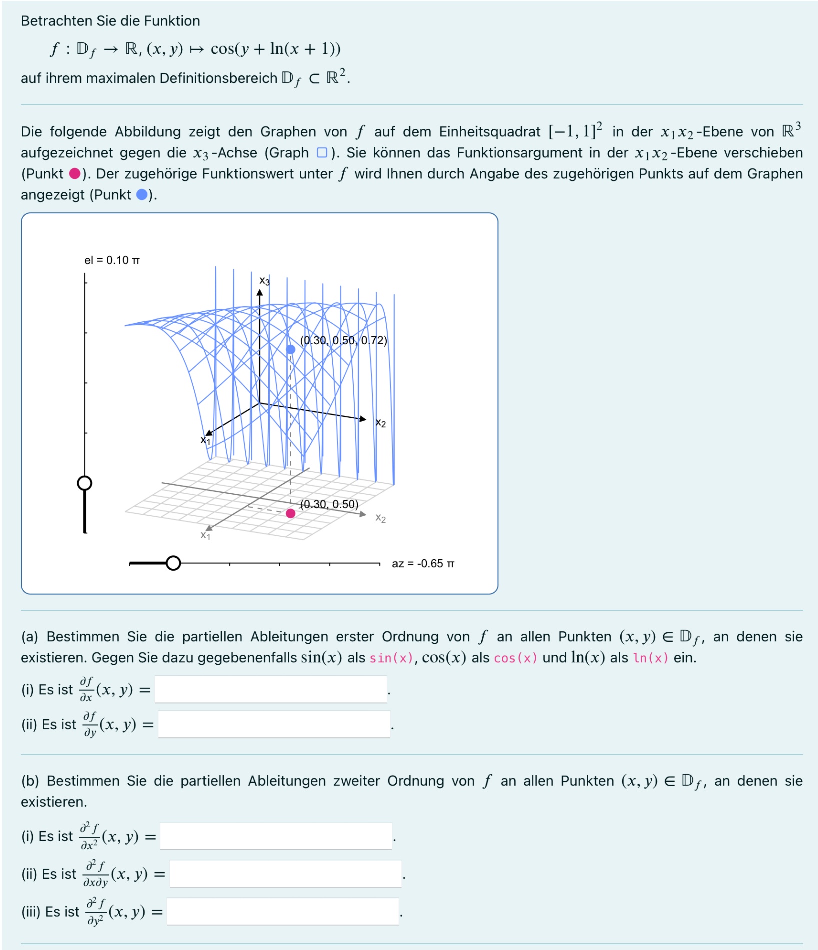
Vorkenntnisse: Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen und logarithmischen Funktionen

Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2 und die Exponenten b_1, b_2, c_1, c_2 werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.6 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (6)

Tags: Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y + \ln(x + 1))$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren. Gegen Sie dazu gegebenenfalls $\sin(x)$ als `sin(x)`, $\cos(x)$ als `cos(x)` und $\ln(x)$ als `ln(x)` ein.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ______ .

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ______ .

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ______ .

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_1\, g_1(h_2(x^{b_2}\, y^{b_2}) + a_2\, x^{b_2}\, y^{b_1}),$$

wobei $g \in \{\cos, \sin\}$, $h_1, h_2 \in \{\ln, g\}$ mit $h_1 \neq h_2$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j \in \mathbb{N}_0$ mit $b_1 + b_2 = 1$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gewählt werden.

Vorkenntnisse: Partielle Ableitung, Ableiten von trigonometrischen Funktionen

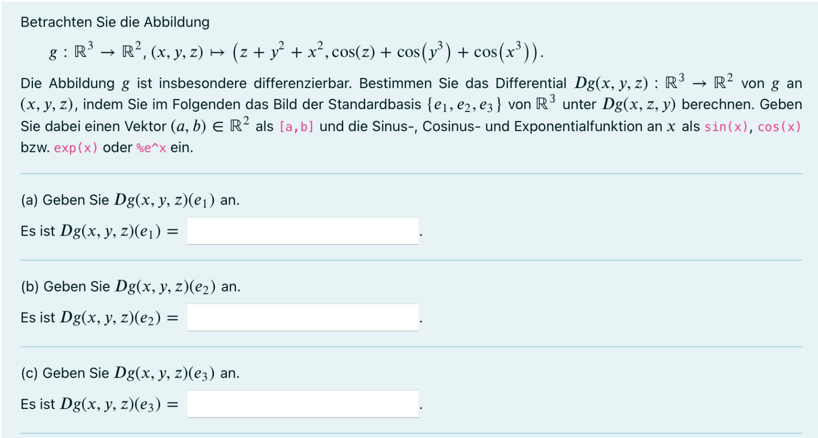
Randomisierung: Die Koeffizienten a_1, a_2 und die Exponenten b_1, b_2 werden zufällig ausgewählt.

Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6 Berechnung von Differential und Jacobimatrix

4.2.6.1 Differential einer komponentenweise definierten Abbildung (1)

Tags	Differential, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktionen
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Betrachten Sie die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \left(z + y^2 + x^2, \cos(z) + \cos\left(y^3\right) + \cos\left(x^3\right)\right).$$

Die Abbildung g ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Dg(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ von g an (x, y, z), indem Sie im Folgenden das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Dg(x, z, y)$ berechnen. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` und die Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion an x als `sin(x)`, `cos(x)` bzw. `exp(x)` oder `%e^x` ein.

(a) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_1)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_1) =$.

(b) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_2)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_2) =$.

(c) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_3)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_3) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential einer komponentenweise definierten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to F(x, y, z)$ vermöge der Ketten- und Produktregel berechnet. Die Komponenten von F sind Summen polynomieller, trigonometrischer und exponentieller Funktionen. Jeder Summand ist von der Form $$w^a, \quad \cos(w^a), \quad \sin(w^a), \quad \text{oder} \quad \exp(w),$$ wobei $w \in \{x, y, z\}$ und $a \in \{1, 2, 3\}$ für jeden Summand paarweise verschieden von den übrigen Summanden gewählt werden.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Der Grad a der polynomiellen Anteile wird zufällig aus einer Liste ausgewählt. Die polynomiellen, trigonometrischen und exponentiellen Anteile der Funktionskomponenten werden mithilfe einer Liste zufällig ausgewählt. Dies hat gegebenenfalls Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	Die Liste der Bezeichner und der Exponenten kann beliebig geändert oder ergänzt werden.
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.2 Differential einer komponentenweise definierten Abbildung (2)

Tags Differential, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktionen

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \left(-e^x z^4 - x\,y, y \sin^2(y\,z)\right).$$

Die Abbildung h ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Dh(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ von h an (x, y, z), indem Sie im Folgenden das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Dh(x, z, y)$ berechnen. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` und die Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion an x als `sin(x)`, `cos(x)` bzw. `exp(x)` oder `%e^x` ein.

(a) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_1)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_1) =$ ______.

(b) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_2)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_2) =$ ______.

(c) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_3)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_3) =$ ______.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Differential einer komponentenweise definierten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to F(x, y, z)$ vermöge der Ketten- und Produktregel berechnet. Die Komponenten von F sind Summen polynomieller, trigonometrischer und exponentieller Funktionen. Jeder Summand ist von der Form

$$\pm u^a\, f(\pm v), \quad \pm w\,(g(\pm w\, u))^b, \quad \pm h(\pm v^c\, w), \quad \text{oder} \quad \pm\,(\pm w)^d,$$

wobei $u, v, w \in \{x, y, z\}$, $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $f, g, h \in \{\cos, \sin, \exp\}$ jeweils paarweise verschieden gewählt werden.

Vorkenntnisse Differential mehrdimensionaler Abbildungen

Randomisierung Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Die Exponenten a, b, c werden zufällig aus einer Liste ausgewählt. Die polynomiellen, trigonometrischen und exponentiellen Anteile f, g, h der Funktionskomponenten werden mithilfe einer Liste zufällig ausgewählt. Die Vorzeichen der Summanden und Argumente werden zufällig aus einer Liste ausgewählt. Dies hat gegebenenfalls Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

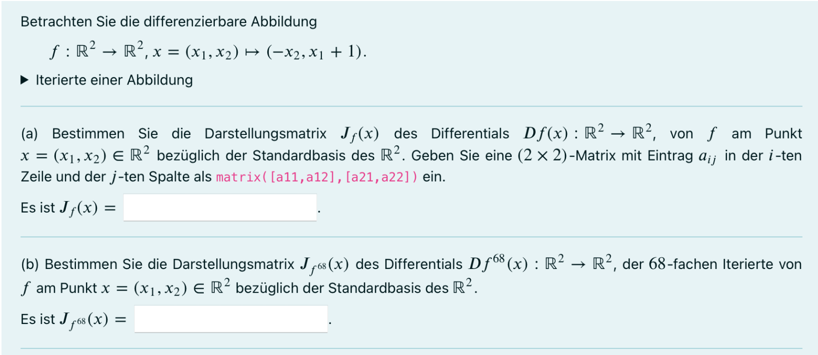
Anpassung Die Liste der Bezeichner und der Exponenten kann beliebig geändert oder ergänzt werden.

Verbotene Wörter diff, diffx

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.3 Jacobimatrix einer iterierten Abbildung (1)

Tags	Differential, Jacobimatrix
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Betrachten Sie die differenzierbare Abbildung

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1 + 1).$

▶ Iterierte einer Abbildung

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_f(x)$ des Differentials $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, von f am Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine (2×2)-Matrix mit Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte als `matrix([a11,a12],[a21,a22])` ein.

Es ist $J_f(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_{f^{68}}(x)$ des Differentials $Df^{68}(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der 68-fachen Iterierte von f am Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Es ist $J_{f^{68}}(x) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Jacobimatrix der Abbildung $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto ((-1)^k x_2 + a, (-1)^{k+1} x_1 + b)$$ mit $k \in \{-1, +1\}$ und die Jacobimatrix ihrer n-fach Iterierten bestimmt. Das Differential von f entspricht an jedem Punkt einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$.
Vorkenntnisse	Kettenregel, Jacobimatrix
Randomisierung	Der Parameter k wird zufällig als +1 oder -1 gewählt, was die Richtung der Drehung bestimmt. Der Parameter n wird als positive ganze Zahl zwischen 14 und 95 gewählt. Die Parameter a und b werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt. Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.4 Jacobimatrix einer iterierten Abbildung (2)

Tags Differential, Jacobimatrix

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die differenzierbare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{3\,x_1}{5} - \frac{3\,x_2}{2}, \frac{5\,x_1\,x_2^2}{2} - \frac{3\,x_2}{5} + \frac{6\,x_1}{25}\right).$$

▶ Iterierte einer Abbildung

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_f(0)$ des Differentials $Df(0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, von f am Punkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine (2×2)-Matrix mit Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte als `matrix([a11,a12],[a21,a22])` ein.

Es ist $J_f(0) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_{f^{38}}(0)$ des Differentials $Df^{38}(0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der 38-fachen Iterierten von f am Punkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Es ist $J_{f^{38}}(0) =$ ______.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird die Jacobimatrix einer polynomiellen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und die Jacobimatrix ihrer n-fach Iterierten jeweils an null bestimmt. Die Abbildung f besitzt an null einen Fixpunkt und deren Jacobimatrix an null ist eine nilpotente (2×2)-Matrix.

Vorkenntnisse Kettenregel, Jacobimatrix

Randomisierung Die Koeffizienten der polynomiellen Abbildung f werden zufällig so ausgewählt, dass die oben genannten Eigenschaften von f erhalten bleiben. Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt.

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.7 Gradient und Divergenz

4.2.7.1 Divergenz des Gradientenfeldes einer quadratischen Abbildung (1)

Tags — quadratische Form, Gradient, Divergenz, Laplace-Operator

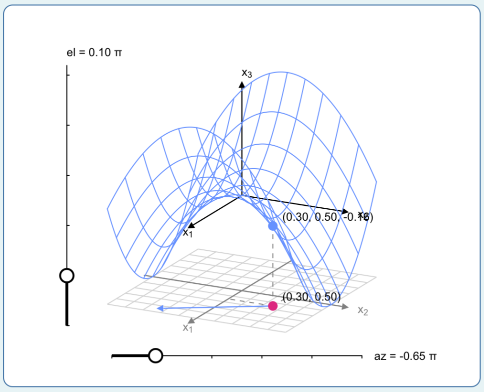
Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Sei $B = (b_1, \dots, b_{2n})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich des Standardskalarprodukts und sei $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ die durch $L(b_k) = (-1)^{k-1} b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, 2n\}$ definierte quadratische Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x),$$

die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet.

Die folgende Abbildung zeigt für $n = 1$ den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Dabei werde B mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



Bestimmen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x)$ des Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f am Punkt $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) =$ ______.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe wird die Divergenz des Gradientenfeldes der quadratischen Abbildung / Form

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot A(x)$$

bestimmt. Dabei ist A eine lineare Abbildung, die den k-ten Basisvektor b_k einer Orthonormalbasis auf $(-1)^{k\pm1}\, b_k$ abbildet.

Vorkenntnisse — Definition des Gradienten, Definition der Divergenz, Spur als Summe der Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit

Randomisierung — Der Exponent der Koeffizienten (-1) in der Definition der linearen Abbildung A wird zufällig aus $k + 1$ und $k-1$ ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

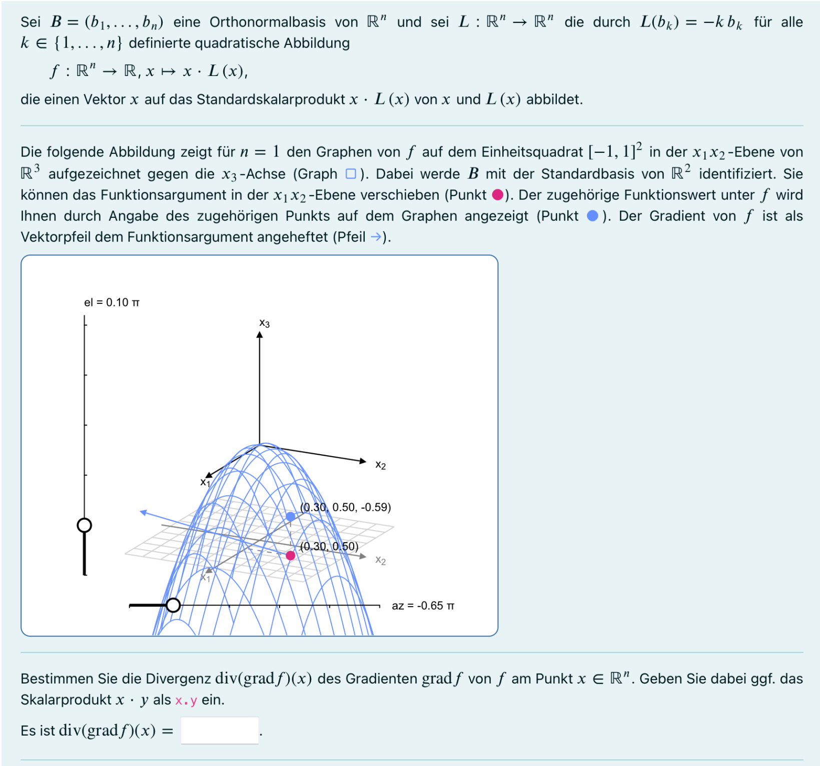
Anpassung — keine

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

4.2.7.2 Divergenz des Gradientenfeldes einer quadratischen Abbildung (2)

Tags quadratische Form, Gradient, Divergenz, Laplace-Operator

Screenshot (Stand 29.07.2024)


Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $L(b_k) = -k\, b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ definierte quadratische Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x),$$

die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet.

Die folgende Abbildung zeigt für $n = 1$ den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ▢). Dabei werde B mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).

Bestimmen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x)$ des Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie dabei ggf. das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) =$ ____ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird die Divergenz des Gradientenfeldes der quadratischen Abbildung / Form

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x \cdot A(x)$$

bestimmt. Dabei ist A eine lineare Abbildung, die den k-ten Basisvektor b_k einer Orthonormalbasis auf $\pm k\, b_k$ abbildet.

Vorkenntnisse Definition des Gradienten, Definition der Divergenz, Spur als Summe der Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit, Gaußsche Summenformel

Randomisierung Das Signum der Koeffizienten in der Definiton der linearen Abbildung A wird zufällig als positiv oder negativ ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.8 Koordinaten, Karten und Parametrisierungen

4.2.8.1 Zylinderkoordinaten

Tags — Zylinderkoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper

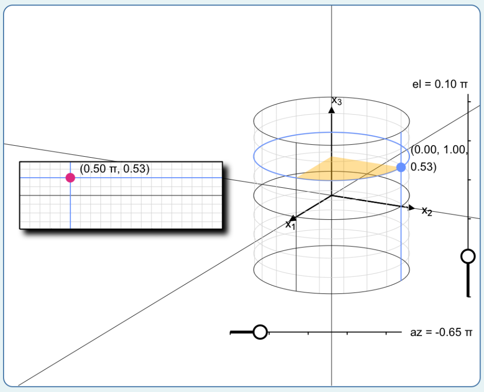
Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; (r, \varphi, h) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Es sind (r, φ, z) die Zylinderkoordinaten des Punkts $f(r, \varphi, z)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Zylinderkoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Zylinderkoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\{1\} \times [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises senkrecht zur x_3-Achse durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(r, \varphi, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r, φ, z). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r, \varphi, z)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und den Parameter φ als `phi` ein.

(i) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_1) =$ ______.

(ii) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_2) =$ ______.

(iii) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_3) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r, \varphi, z)$ von f an einem Punkt $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r, \varphi, z)) =$ ______.

(c) Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$, an denen das Differential von f nicht injektiv ist.

Es ist $M = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ ______ $\}$.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Zylinderkoordinaten bestimmt. Anhand der Funktionaldeterminante wird untersucht, wo das Differential injektiv ist.

Vorkenntnisse — Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Charakterisierung der Injektivität linearer Abbildung

Randomisierung — keine

Anpassung — keine

Verbotene Wörter — diff, diffx, determinant

Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.2 Kugelkoordinaten

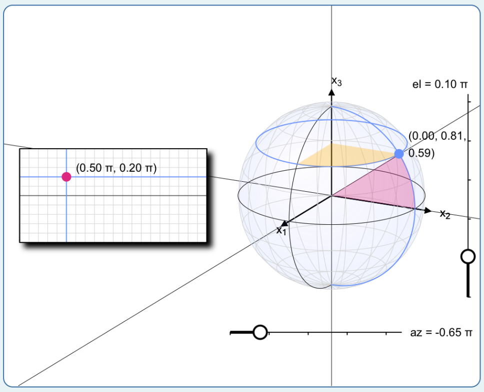
Tags	Kugelkoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (r,\varphi,\psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\psi) \\ 0 \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Es sind (r,φ,ψ) die Kugelkoordinaten des Punkts $f(r,\varphi,\psi)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Kugelkoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Kogelkoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\{1\} \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ◁) des Großkreises zwischen Äquator und Bildpunkt kennzeichnet den Winkel ψ und der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises parallel zum Äquator durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r,φ,ψ). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1,e_2,e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r,\varphi,\psi)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und die Parameter φ und ψ als `phi` bzw. `psi` ein.

(i) Es ist $Df(r,\varphi,\psi)(e_1) =$ ______ .

(ii) Es ist $Df(r,\varphi,\psi)(e_2) =$ ______ .

(iii) Es ist $Df(r,\varphi,\psi)(e_3) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r,\varphi,\psi)$ von f an einem Punkt $(r,\varphi,\psi) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r,\varphi,\psi)) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Kugelkoordinaten bestimmt.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, determinant
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.3 Toruskoordinaten

Tags: Toruskoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper

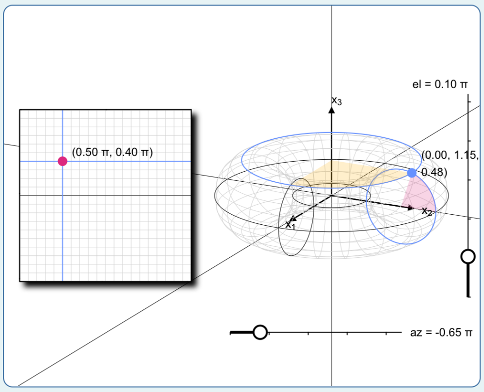
Screenshot: (Stand 05.07.2023)

Betrachten Sie für $R > 0$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (r, \varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r\cos(\psi) \\ 0 \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Es sind (r, φ, ψ) die Toruskoordinaten des Punkts $f(r, \varphi, \psi)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Toruskoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Toruskoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\{\frac{1}{2}\} \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f für $R = 1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ⊲) des Kreises zwischen äußerem Äquator und Bildpunkt kennzeichnet den Winkel ψ und der Kreissektor (Sektor ⊲) des Kreises parallel zum äußeren und inneren Äquator durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r, φ, ψ). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r, \varphi, \psi)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und die Parameter φ und ψ als `phi` bzw. `psi` ein.

(i) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_1) =$ ______.

(ii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_2) =$ ______.

(iii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_3) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r, \varphi, \psi)$ von f an einem Punkt $(r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r, \varphi, \psi)) =$ ______.

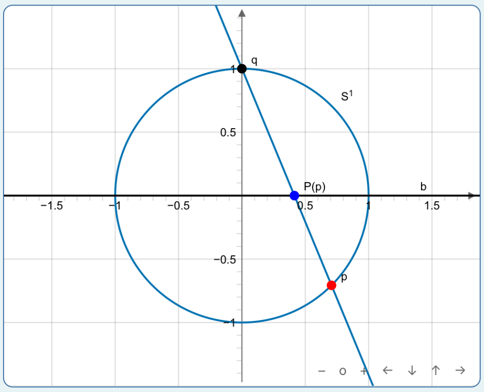
Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz: CC BY-SA 4.0
Thema: In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Toruskoordinaten bestimmt.
Vorkenntnisse: Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung: keine
Anpassung: keine
Verbotene Wörter: diff, diffx, determinant
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.4 Stereographische Projektion

Tags	Differential, Parametrisierung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei S^n die euklidische Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei $q \in S^n$ beliebig. Für jeden Punkt $p \in S^n \setminus \{q\}$ schneidet die Gerade durch p und q das orthogonale Komplement $q^\perp$ von q in genau einem Punkt $P(p)$. Bestimmen Sie P als Funktion von p, deren Inverse und das Differential ihrer Inversen ohne Verwendung von Koordinaten. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation für $n = 1$ und $q = (0, 1)$ (schwarzer Punkt). Das orthogonale Komplement $q^\perp$ stimmt mir der x-Achse überein. Sie können p entlang von S^1 verschieben (roter Punkt). Der zugehörige Funktionswert $P(p)$ unter P wird Ihnen als Punkt auf der x-Achse angezeigt (blauer Punkt).



(a) Bestimmen Sie $P(p)$ in Abhängigkeit von p und von q. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $p \cdot q$ von p und q als p . q ein.

Es ist $P(p) =$.

(b) Die durch Aufgabenteil (a) definierte Abbildung

$$P : S^n \setminus \{q\} \to q^\perp,\ p \mapsto P(p)$$

heißt stereographische Projektion und ist insbesondere eine Bijektion. Bestimmen Sie deren Umkehrabbildung P^{-1}, indem Sie $P^{-1}(x)$ für $x \in q^\perp$ angeben. Geben Sie dabei das Quadrat $|x|^2$ der Norm von x als x . x ein.

Es ist $P^{-1}(x) =$.

(c) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Fortsetzung von P^{-1} auf eine offene Umgebung von $q^\perp$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung ϕ ist stetig differenzierbar. Bestimmen Sie, dass Differential $D\phi(x)(v)$ an einem Punkt $x \in q^\perp$ in Richtung $v \in q^\perp$.

▸ Kanonische Fortsetzung von P^{-1}

Es ist $D\phi(x)(v) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe werden die stereographische Projektion, deren Inverse und deren Differential bestimmt.
Vorkenntnisse	Schnitt zwischen Geraden und Niveaulinien, Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja