3.5 Integration, Eigenschaften und Methoden

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln Grundlagen der Integration reeller Funktionen. Die Aufgaben umfassen die Bestimmung von Stammfunktionen, Integralen und uneigentlichen Integralen unter Anwendung der Integrationsmethoden der partiellen Integration, Substitution und Partialbruchzerlegung. Weiterhin werden die Methoden in Anwendungsbeispielen erprobt.

Inhaltsverzeichnis

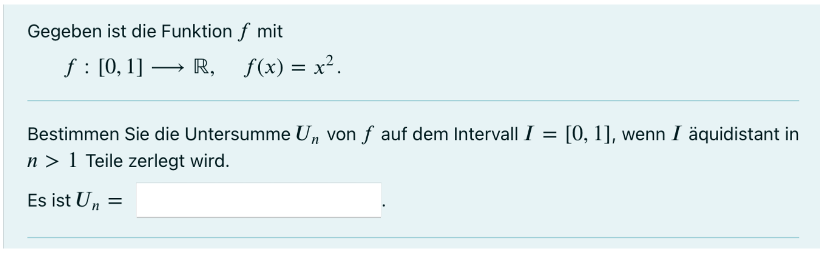
3.5.1 Ober- und Untersumme reeller Funktionen . . . 184
3.5.1.1 Untersumme einer quadratischen Funktion bestimmen . . . 184
3.5.1.2 Integration von Regelfunktionen (1) . . . 185
3.5.1.3 Integration von Regelfunktionen (2) . . . 187
3.5.2 Bestimmte Integrale . . . 189
3.5.2.1 Integrale berechnen (1) . . . 189
3.5.2.2 Durchfluss durch einen Wasserschlauch . . . 190
3.5.2.3 Fläche zwischen Graph und x-Achse berechnen . . . 191
3.5.2.4 Bestimmte Integrale (1) . . . 192
3.5.2.5 Bestimmte Integrale (2) . . . 193
3.5.2.6 Bestimmte Integrale (3) . . . 194
3.5.2.7 Bestimmte Integrale (4) . . . 195
3.5.2.8 Bestimmte Integrale (5) . . . 196
3.5.2.9 Trägheitsmoment Platte . . . 197
3.5.2.10 Wärmeleitung im Rundstab . . . 199
3.5.2.11 Ladungsdichte Gewitterwolke . . . 200
3.5.2.12 Micromouse . . . 201
3.5.3 Partielle Integration . . . 204
3.5.3.1 Partielle Integration (1) . . . 204
3.5.3.2 Partielle Integration (2) . . . 205
3.5.3.3 Partielle Integration und Integration durch Substitution . . . 206
3.5.3.4 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (1) . . . 207
3.5.3.5 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (2) . . . 208
3.5.3.6 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (3) . . . 209
3.5.3.7 Magnetfeld Scheibe . . . 210
3.5.3.8 Yukawa-Potential Ladungsdichte . . . 212
3.5.4 Integration durch Substitution . . . 213
3.5.4.1 Integration durch Substitution (1) . . . 213
3.5.4.2 Integration durch Substitution (2) . . . 214
3.5.4.3 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (1) . . . 215
3.5.4.4 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (2) . . . 216
3.5.4.5 Kreissektor (1) . . . 217
3.5.4.6 Kreissektor (2) . . . 219
3.5.4.7 Deep Space 1 . . . 221
3.5.4.8 Elektrisches Radialfeld . . . 222
3.5.5 Integration durch Partialbruchzerlegung . . . 224
3.5.5.1 Partialbruchzerlegung . . . 224
3.5.6 Uneigentliche Integrale . . . 226

3.5.6.1 Uneigentliches Integral (1) 226
3.5.6.2 Uneigentliches Integral (2) 228

3.5.1 Ober- und Untersumme reeller Funktionen

3.5.1.1 Untersumme einer quadratischen Funktion bestimmen

Tags	monoton, Untersumme, Integral, Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion $$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$ gegeben. Es soll die Untersumme U_n von f auf dem Intervall $I = [0,1]$ bestimmt werden, wenn I äquidistant in $n > 1$ Teile zerlegt wird.
Vorkenntnisse	Untersumme, Integral
Randomisierung	keine
Anpassung	Die Funktion f kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden, sofern es für die Untersumme U_n eine geschlossene Formel gibt.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.1.2 Integration von Regelfunktionen (1)

Tags: Integral, Treppenfunktion, Regelfunktion, gleichmäßige Konvergenz

Screenshot: (Stand 16.09.2024)

Betrachten Sie die Funktion

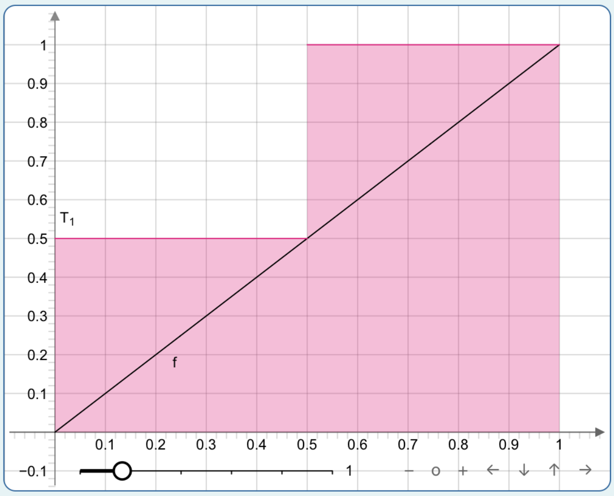
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$T_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{\lceil 2^n \cdot x \rceil}{2^n}\right).$$

▶ Gaußklammer

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f und T_n für $n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Mithilfe des Schiebreglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. Bestimmen Sie dazu für festes $k \in \mathbb{N}$ die Menge N_k aller natürlichen Zahlen n, sodass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Es ist $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid$ ____ $\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral von T_n in Abhängigkeit von n.

Es ist $\int T_n =$ ____.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\int T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int T_n =$ ____.

(d) Geben Sie das Integral von f an.

Es ist $\int f =$ ____.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll das Integral der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass eine gegebene Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. In Aufgabenteil (b) sollen die Integrale der Glieder der Folge der Treppenfunktionen bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) und (d) soll der Grenzwert der Folge von Integralen aus Aufgabenteil (b) bestimmt und damit das Integral von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kenntnis von Treppenfunktionen und Regelfunktionen und den zugehörigen Integralbegriffen, gleichmäßige Konvergenz, Gauß-Klammer
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.1.3 Integration von Regelfunktionen (2)

Tags	Integral, Treppenfunktion, Regelfunktion, gleichmäßige Konvergenz
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Betrachten Sie die Funktion

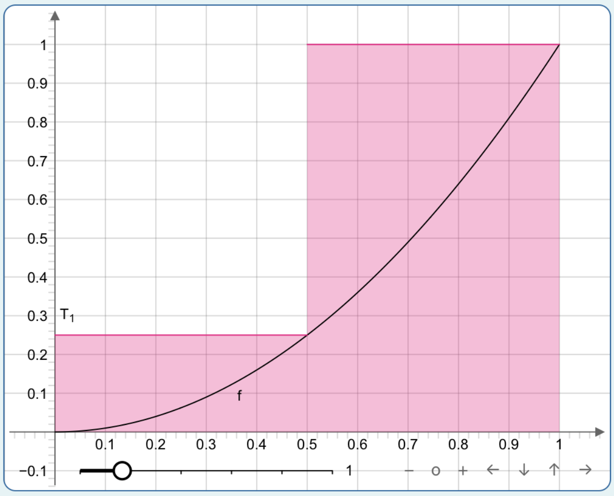
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$T_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{\lceil 2^n \cdot x \rceil}{2^n}\right).$$

▶ Gaußklammer

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f und T_n für $n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Mithilfe des Schiebreglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. Bestimmen Sie dazu für festes $k \in \mathbb{N}$ die Menge N_k aller natürlichen Zahlen n, sodass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Es ist $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral von T_n in Abhängigkeit von n.

Es ist $\int T_n =$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\int T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int T_n =$.

(d) Geben Sie das Integral von f an.

Es ist $\int f =$.

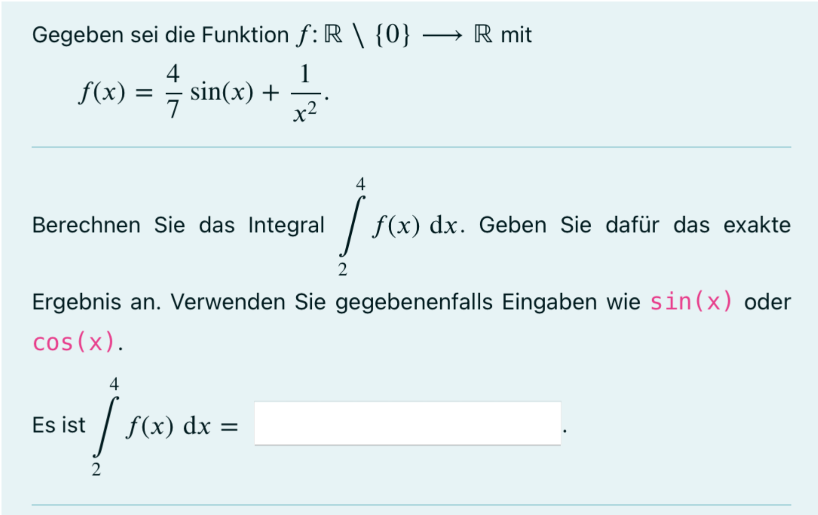
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll das Integral der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass eine gegebene Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. In Aufgabenteil (b) sollen die Integrale der Glieder der Folge der Treppenfunktionen bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) und (d) soll der Grenzwert der Folge von Integralen aus Aufgabenteil (b) bestimmt und damit das Integral von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kenntnis von Treppenfunktionen und Regelfunktionen und den zugehörigen Integralbegriffen, gleichmäßige Konvergenz, Gauß-Klammer
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2 Bestimmte Integrale

3.5.2.1 Integrale berechnen (1)

Tags	Integral, Stammfunktion, elementare Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{4}{7}\sin(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Berechnen Sie das Integral $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Geben Sie dafür das exakte Ergebnis an. Verwenden Sie gegebenenfalls Eingaben wie `sin(x)` oder `cos(x)`.

Es ist $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x =$.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin(x) + \frac{(-1)^k}{x^b}$$

gegeben. Es soll das bestimme Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $x_0, x_1 \in (0,\infty) \setminus \{0\}$ und $x_0 < x_1$ berechnet werden.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Stammfunktion, bestimmtes Integral
Randomisierung	Die Parameter a, b und k sind randomisierte ganze Zahlen.
Anpassung	Die Funktion f kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.2 Durchfluss durch einen Wasserschlauch

Tags	stückweise Funktion, Integral, Durchfluss
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Durch einen Schlauch mit Durchmesser $1.5\,\mathrm{cm}$ fließt Wasser. Die Fließgeschwindigkeit lässt sich als Funktion der Zeit auffassen und beträgt:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.4\,t^2 & t \in [0,1] \\ 0.4 & t \in [1,20] \\ 8.4 - 0.4\,t & t \in [20,21] \\ 0 & t > 21 \end{cases}$$

Dabei werden die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die Zeit t in Sekunden angegeben.

▶ Hinweis

Berechnen Sie das Volumen des durch den Schlauch geflossenen Wassers. Geben Sie Ihre Antwort als Dezimalzahl an, indem Sie auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

Das Volumen beträgt ______ Liter.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Oskar Riedler
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist eine stückweise definierte Funktion

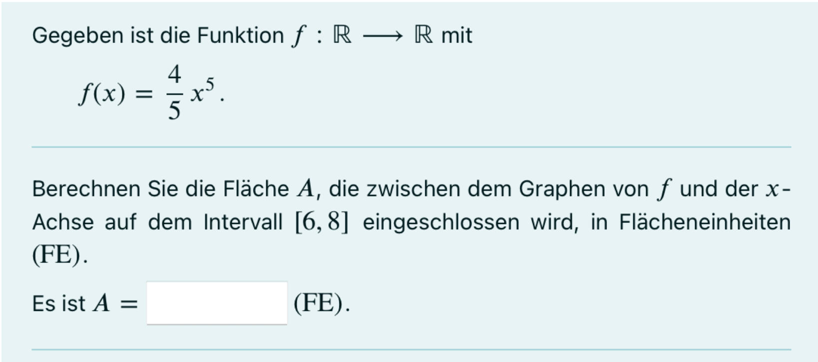
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a\,t^2 & t \in [0,1] \\ a & t \in [1,20] \\ a(21-t) & t \in [20,21] \\ 0 & t > 21 \end{cases}$$

gegeben, die die Fließgeschwindigkeit eines Schlauches mit Durchmesser d beschreibt. Es soll das Volumen des durch den Schlauch geflossenen Wassers berechnet und auf 2 Nachkommastellen gerundet angegeben werden.

Randomisierung	Die Parameter a und d sind randomisiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.3 Fläche zwischen Graph und x-Achse berechnen

Tags	Integral, Flächenberechnung, eingeschlossene Fläche, Stammfunktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = cx^k$ gegeben. Es soll die Fläche A, die zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$ eingeschlossen wird, in Flächeneinheiten (FE) berechnet werden .
Randomisierung	Die Parameter a, b, c und k sind randomisiert mit $a < b$.
Anpassung	Die Funktion f kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.4 Bestimmte Integrale (1)

Tags	Integral, Substitution.
Screenshot	(Stand 27.08.2024)

Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5\,x}{\sqrt{3\,x^2 + 8}}.$$

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$ im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $\displaystyle\int_{-3\,b}^{5\,b} f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________,

mit $b > 0$.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Wurzelfunktion, die mit Hilfe einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution.
Randomisierung	Unabhängige Parameter im Zähler und Nenner der zu integrierenden Funktion und in Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.5 Bestimmte Integrale (2)

Tags	Integral, Substitution.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)
	Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion: $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5\,x}{6\,x^2+8}.$$ Verwenden Sie `log(x)` für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ und `abs(x)` für $\lvert x \rvert$ im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an. Es ist $\int_{b+2}^{5\,b} f(x)\,\mathrm{d}x =$ _____, mit $b > 0$.
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Logarithmusfunktion, die mit Hilfe einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution.
Randomisierung	Unabhängige Parameter im Zähler und Nenner der zu integrierenden Funktion und in Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.6 Bestimmte Integrale (3)

Tags	Integral, partielle Integration.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)

Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 8\cos(5x)\sin(5x).$$

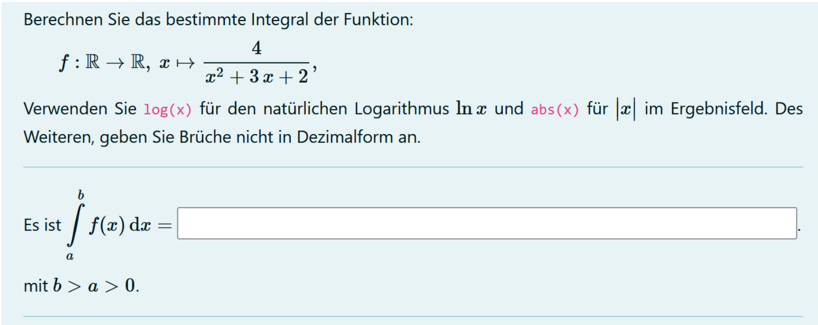
Verwenden Sie `sin(x)` bzw. `cos(x)` für die trigonometrischen Funktionen im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine trigonometrische Funktion, die mit Hilfe einer partiellen Integration berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, partielle Integration.
Randomisierung	Zwei Unabhängige Parameter im Integranden und beide Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.7 Bestimmte Integrale (4)

Tags	Integral, Partialbruchzerlegung, Substitution.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Summe aus Logarithmusfunktionen, die mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung (nur Linearfaktoren) und anschließender Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Partialbruchzerlegung, Substitution.
Randomisierung	Zähler und beide Nullstellen des Nenners werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.8 Bestimmte Integrale (5)

Tags	Integral, Substitution.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)
	Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion: $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{4\sin(2x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)},$$ Verwenden Sie %pi für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an. Es ist $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Arkustangensfunktion, die mit Hilfe von trigonometrischen Additionstheoremen und einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution, trigonometrischen Additionstheoreme.
Randomisierung	Ganzzahliger Parameter im Zähler und ganzahliges Vielfaches von $\pi/4$ (Liste) in der oberen Integralgrenze werden zufällig gewählt.
Anpassung	Obere Integralgrenze kann angepasst werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.9 Trägheitsmoment Platte

Tags Integral, Trägheitsmoment

Screenshot (Stand 16.09.2024)

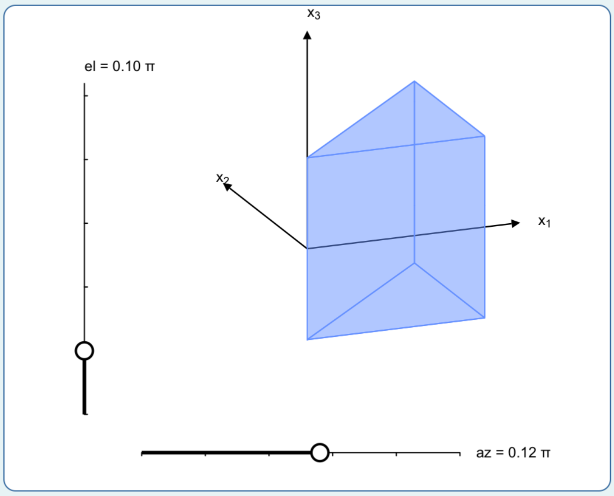
Sei P eine Platte mit stetiger Massenverteilung. Die folgende Abbildung zeigt P als Teilmenge

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le x_1, -\frac{1}{2} \le x_3 \le \frac{1}{2} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$. Die Massendichte von P lässt sich als Funktion

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} x_2 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

modellieren.



(a) Bestimmen Sie die Masse

$$m = \iiint \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

von P.

Es ist $m =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \iiint x_i\, \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

des Massenmittelpunkts $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ von P. Geben Sie einen Punkt (a, b, c) als `[a,b,c]` ein.

Es ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) =$ ______.

(c) Berechnen Sie für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ das Massenträgheitsmoment

$$I_i = \iiint r_i(x)^2\, \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

von P bezüglich der i-ten Koordinatenachse $A_i = \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3 \mid x_j = 0,\ j \neq i\}$. Dabei bezeichne $r_i(x)$ den euklidischen Abstand zwischen x und A_i. Geben Sie I_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils als ein Vielfaches der Masse m von P an.

(i) Es ist $I_x =$ ______ m.

(ii) Es ist $I_y =$ ______ m.

(iii) Es ist $I_z =$ ______ m.

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die Massenträgheitsmomente einer Platte stetiger Massendichte bestimmt werden. Die Platte ist dabei durch Angabe von Schranken für die x-, y- und z-Koordinaten in ihrer Ausdehnung bestimmt. In Aufgabenteil (a) soll die Masse der Platte bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Koordinaten des Massenmittelpunkts der Platte bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) sollen die Massenträgheitsmomente der Platte bezüglich der drei Koordinatenachsen bestimmt und als Vielfache der Masse der Platte angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration, Satz von Fubini
Randomisierung	Die Schranken der x-, y- und z-Koordinaten der Platte sowie die Massendichte sind randomisiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.5.2.10 Wärmeleitung im Rundstab

Tags — Integral, Wärmewiderstand, Wärmestrom

Screenshot — (Stand 16.09.2024)

> Ein Rundstab der Länge l aus einem Material der Wärmeleitfähigkeit k wird als Wärmeleiter untersucht. Der Durchmesser des Stabs wird als Funktion
>
> $$d : [0, l] \to (0, \infty),\ x \mapsto d_0\,(a\,x + 1)$$
>
> in Abhängigkeit des Abstands x zu einem der Enden des Stabs modelliert. Der (infinitesimale) Wärmestrom
>
> $$I(x) = -k\,A(x)\,T'(x)$$
>
> im Stab wird im Folgenden als konstant angenommen.
>
> ---
>
> zu (a) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche $A(x)$ in Abhängigkeit des Abstands x zu einem der Enden des Stabs. Geben Sie gegebenenfalls d_0 als `d_0` und π als `%pi` ein.
>
> Es ist $A(x) =$ ________.
>
> ---
>
> zu (b) Bestimmen Sie die Temperaturdifferenz
>
> $$\Delta T = T(l) - T(0)$$
>
> zwischen den beiden Enden des Stabs und geben sie diese in Abhängigkeit des konstanten Wärmestroms I, der Länge l und der Wärmeleitfähigkeit k an.
>
> Es ist $\Delta T =$ ________.

Autor — Emma van der Smagt (RUB)

Idee — Emma van der Smagt

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe wird ein Rundstab l aus einem Material der Wärmeleitfähigkeit k als Wärmeleiter untersucht. Der Durchmesser des Stabs wird als Funktion $d : [0, l] \to (0, \infty)$, $x \mapsto d_0(a\,x + 1)$ in Abhängigkeit des Abstand x von einem der Enden des Stabs modelliert. In Aufgabenteil (a) soll zunächst die Querschnittsfläche in Abhängigkeit des Abstands x von einem der Enden des Stabs bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll aus den als konstant angenommenen Wärmestrom

$$I(x) = -k\,A(x)\,T'(x)$$

die Temperaturdifferenz ΔT zwischen den beiden Enden des Stabs bestimmt werden.

Verbotene Wörter — int, limit

Vorkenntnisse — Integration

Randomisierung — keine

Anpassung — keine

Sonderoption — Feedback unterdrücken: nein

3.5.2.11 Ladungsdichte Gewitterwolke

Tags	Integral, Ladung, Strom
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

> Gewitter kann man physikalisch als Wetterphänomen auffassen, bei dem sich Entladungsvorgänge, "Blitze" in der Atmosphäre ereignen. Den Entladungsvorgängen gehen Ladungstrennungen innerhalb von Wolken oder zwischen Wolken und dem Erdboden voraus.
>
> Im Folgenden wird angenommen, dass eine Wolke mit einem zeitabhängigen Strom
>
> $$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{1}{t^2-16}$$
>
> aufgeladen und damit zur Gewitterwolke wird. Die zeitabhängige Ladung Q der Gewitterwolke ist zu Beginn des Aufladens identisch $Q(0) = 0$. Bestimmen Sie die Ladung $Q(1)$ der Gewitterwolke nach der Zeit 1 des Aufladens.
>
> Es ist $Q(1) =$

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ladung Q einer Gewitterwolke bestimmt werden, die von einem zeitabhängigen Strom $I(t) = Q'(t)$ geladen wird.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration, Ladung und Strom
Randomisierung	Der Funktion, die den zeitabhängigen Strom beschreibt, wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste von Funktionen kann um geeignete Funktionen ergänzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

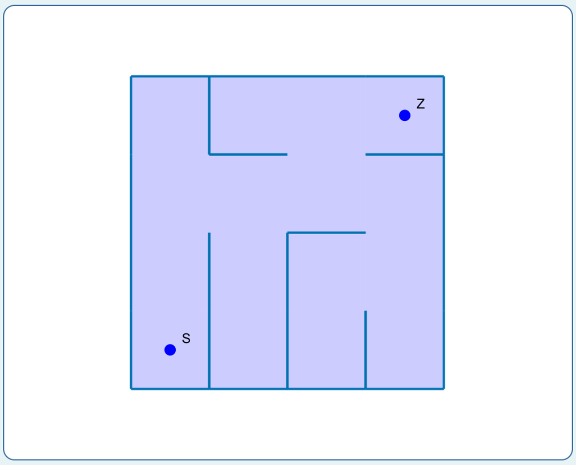
3.5.2.12 Micromouse

Tags	Integral, Rekonstruktion, Geschwindigkeit, Beschleunigung
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

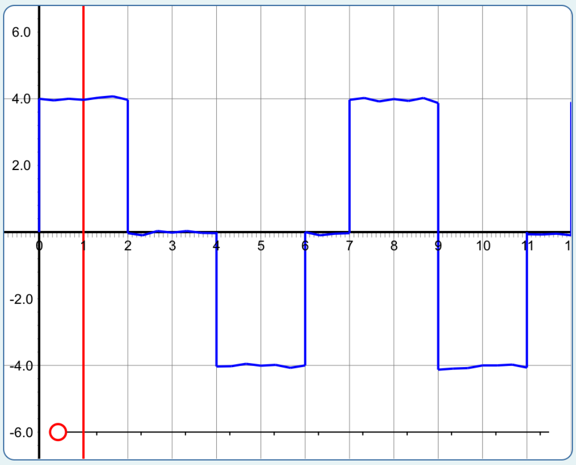
Ein autonomes Fahrzeug, gennant Micromouse-Roboter, erkundet ein Labyrinth. Untersuchen Sie anhand von Bewegungsdaten den Weg des Micromouse-Roboter bei seiner Erkundungsfahrt und stellen Sie eine Vermutung zum verwendeten Lösungsalgorithmus auf. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

▶ Micromouse-Roboter

Das in dieser Aufgabe zu untersuchende Labyrinth besteht aus quadratischen Zellen, die in einem (4×4)-Raster angeordnet sind. Die Wege im Labyrinth werden durch an den Seiten der Zellen angebrachte Wände gebildet. Zellen, die nicht durch eine Wand getrennt werden, heißen benachbart. Die folgende Abbildung zeigt schematisch das zu untersuchende Labyrinth, den Startpunkt S und den Zielpunkt Z.



Der Micromouse-Roboter beginnt seine Erkundungsfahrt am Startpunkt S und folgt einem Lösungsalgorithmus bis er am Zielpunkt Z angekommen ist. Dabei bewegt sich der Micromouse-Roboter geradlinig vom Mittelpunkt einer Zelle zu dem Mittelpunkt einer benachbarten Zelle. Der Micromouse-Roboter fährt stets vorwärts und ändert seine Bewegungsrichtung durch Drehungen von 90° oder 180° um die Hochachse jeweils an den Mittelpunkten der Zellen. Die folgende Abbildung zeigt die longitudinale Beschleunigung des Micromouse-Roboter in $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$ aufgezeichnet gegen die Zeit in s im Verlauf seiner 88-sekündigen Erkundungsfahrt.



(a) Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit v_M des Micromouse-Roboters während seiner Erkundungsfahrt mithilfe der oben angegebenen Bewegungsdaten und geben Sie diese in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist $v_M =$ _____.

(b) Untersuchen Sie das Labyrinth und geben Sie mithilfe der schematischen Darstellung des Labyrinths und der Bewegungsdaten des Micromouse-Roboters die ungefähren Abmessungen des Labyrinths an. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(i) Bestimmen Sie die Seitenlänge l_Z einer Zelle des Labyrinths und geben Sie diese in m bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist $l_Z =$ _____.

(ii) Bestimmen Sie die Seitenlänge l_L des Labyrinths und geben Sie diese in m bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist $l_L =$ _____.

(c) Geben Sie mithilfe der schematischen Darstellung des Labyrinths und der Bewegungsdaten des Micromouse-Roboters an, welche Zellen des Labyrinths der Micromouse-Roboter während seiner Erkundungsfahrt besucht hat. Markieren Sie dazu die von dem Micromouse-Roboter besuchten Zellen in der obigen Abbildung des Labyrinths durch Klicken auf die entsprechende Zelle. Markierte Zellen zeigen ein Kreuz und sind rot gekennzeichnet, nicht markierte Zellen zeigen kein Kreuz und sind blau gekennzeichnet.

(d) Rekonstruieren Sie einen Lösungsalgorithmus für die Erkundungsfahrt des Micromouse-Roboters, der den obigen Bewegungsdaten entspricht. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Pseudocode.

```
Start
    Setze Micromouse-Roboter auf Startpunkt
    Solange Micromouse-Roboter nicht am Zielpunkt ist
        Wenn der Weg nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] frei ist
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍]
        Sonst Wenn der Weg nach vorne frei ist
            Tue nichts
        Sonst Wenn der Weg nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] frei ist
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍]
        Sonst
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍]
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍]
        Ende Wenn
        Bewege Micromouse-Roboter nach vorne
    Ende Solange
Ende
```

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll der Weg und der zugrundeliegende Lösungsalgorithmus eines autonomen Fahrzeuges / Roboters während der Erkundungsfahrt durch ein Labyrinth anhand von Bewegungsdaten untersucht werden: Gegeben sind ein quadratisches Labyrinth mit Start- und Zielpunkt und der zeitliche Verlauf longitudinaler Beschleunigungsdaten des Roboters während seiner Erkundungsfahrt. In Aufgabenteil (a) soll die maximale Geschwindigkeit des Roboters bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll die Seitenlänge der Zellen und die des Labyrinths bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) sollen die von dem Roboter besuchten Zellen des Labyrinths markiert werden. In Aufgabenteil (d) soll ein möglicher Lösungsalgorithmus, dem der Roboter folgt, rekonstruiert werden, indem ein Lückentext geeignet ergänzt wird.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Rekonstruktion von Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg bei Angabe konstanter Beschleunigung, Pseudocode lesen und verstehen
Randomisierung	Das Labyrinth wird mithilfe einer Variante des Aldous-Broder Algorithmus bis auf wenige Zellen des Labyrinths zufällig erzeugt, sodass mithilfe der Bewegungsdaten des Roboters die einzelnen Aufgabenteile gelöst werden können. Die konstante Beschleunigung des Roboter wird zufällig als ganze Zahl zwischen 3 und 7 jeweils einschließlich mit der Einheit $\frac{cm}{s^2}$ ausgewählt. Dies bestimmt unter anderem die Abmessungen der Zellen und des Labyrinths. Die priorisierte Richtung bei Richtungsänderung des Roboters wird zufällig zwischen *links* und *rechts* ausgewählt. Die Randomisierung hat keine bis geringe Auswirkungen auf den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe.
Anpassung	Die Größe des quadratischen Labyrinths kann durch die Wahl der Anzahl n ($n \geq 3$) der Zellen jeder Seite des Labyrinths verändert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3 Partielle Integration

3.5.3.1 Partielle Integration (1)

Tags — Partielle Integration, Integral

Screenshot — (Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -12\,x\,e^{-4\,x}.$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der partiellen Integration.

Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▸ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ des Integranden $f(x)$.

Es sind $u(x) =$ ____ und $v'(x) =$ ____.

(b) Bestimmen Sie u' und v, indem Sie u ableiten und v' unbestimmt integrieren.

Es sind $u'(x) =$ ____ und $v(x) =$ ____.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -12\,x\,e^{-4\,x}\,\mathrm{d}x =$ ____.

Autor — Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee — Tim Inoue

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration berechnet werden, wobei f ein Produkt von differenzierbaren Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für u und v' angegeben werden. In Aufgabenteil (b) sollen dann u' und v durch Ableitung und unbestimmte Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der partiellen Integration und den Aufgabenteilen (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse — Partielle Integration, Integral

Randomisierung — Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung — Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.2 Partielle Integration (2)

Tags: Partielle Integration, Integral, Trigonometrie

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -6\cos(x)\sin(x).$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der partiellen Integration. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ des Integranden $f(x)$.

Es sind $u(x) =$ ____ und $v'(x) =$ ____.

(b) Bestimmen Sie u' und v, indem Sie u ableiten und v' unbestimmt integrieren.

Es sind $u'(x) =$ ____ und $v(x) =$ ____.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -6\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x =$ ____.

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration berechnet werden, wobei f ein Produkt von differenzierbaren, trigonometrischen Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für u und v' angegeben werden. In Aufgabenteil (b) sollen dann u' und v durch Ableitung und unbestimmte Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der partiellen Integration und den Aufgabenteilen (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse: Partielle Integration, Integral, Trigonometrie

Randomisierung: Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung: Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.3 Partielle Integration und Integration durch Substitution

Tags Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \left(9\,x^2 + 4\,x\right)\,\cos\left(3\,x^3 + 2\,x^2\right)\,\mathrm{d}x.$$

Gehen Sie dazu schrittweise vor.

(a) Wählen Sie die Integrationsmethode aus, die sich zum Lösen des unbestimmten Integrals $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $f(x) = \left(9\,x^2 + 4\,x\right)\,\cos\left(3\,x^3 + 2\,x^2\right)$ eignet. Geben Sie anschließend eine entsprechende Zerlegung von $f(x)$ durch Funktionsterme $u(x)$ und $v(x)$ an. Beachten Sie dazu den Hinweis zur Zerlegung.

▶ Hinweis zur Zerlegung von f

Die gewählte Integrationsmethode ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

Es sind $u(x) =$ und $v(x) =$.

(b) Berechnen Sie anschließend das unbestimmte Integral $\int \left(9\,x^2 + 4\,x\right)\,\cos\left(3\,x^3 + 2\,x^2\right)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (a) gewählten Integrationsmethode.

Es ist $\int \left(9\,x^2 + 4\,x\right)\,\cos\left(3\,x^3 + 2\,x^2\right)\,\mathrm{d}x =$.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration oder Integration durch Substitution berechnet werden, wobei f ein Produkt oder eine Komposition von differenzierbaren Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x) \text{ oder } f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst die geeignete Integrationsmethode und Wahlen für u und v angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann das unbestimmte Integral über f mit der in (a) gewählten Integrationsmethode berechnet werden.

Vorkenntnisse Partielle Integration, Substitution, Integral

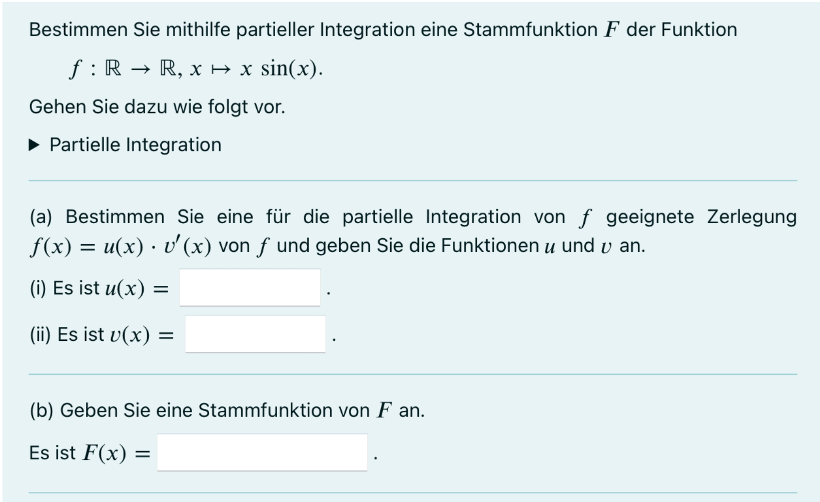
Randomisierung Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.4 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (1)

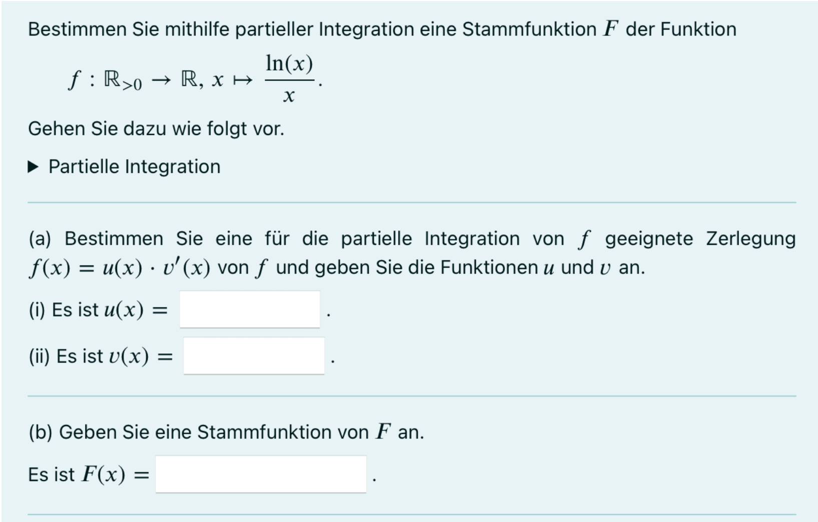
Tags	Partielle Integration, trigonimetrische Funktionen
Screenshot	(Stand 03.09.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe partieller Integration die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^k T(a\,x)$ bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\sin, \cos\}$, $a \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$ und $k \in \{1, 2\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\,v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	partielle Integration
Randomisierung	Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.5 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (2)

Tags	Partielle Integration, e-Funktion, ln-Funktion
Screenshot	(Stand 03.09.2024)


Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie eine für die partielle Integration von f geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u und v an.

(i) Es ist $u(x) =$.

(ii) Es ist $v(x) =$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

Es ist $F(x) =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe partieller Integration die Stammfunktion der Funktion $$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, a\,x^n\, \ln(x)^m$$ bestimmt werden. Dabei sind $a \in 1, 2$ und $(n, m) \in \{(2, 1), (0, 2), (-1, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	partielle Integration
Randomisierung	Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.6 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (3)

Tags Partielle Integration, doppelte Partielle Integration

Screenshot (Stand 16.09.2024)

Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^2\, e^x .$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie eine für die partielle Integration von f geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u und v an.

(i) Es ist $u(x) =$ ______ .

(ii) Es ist $v(x) =$ ______ .

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an. Bitte beachten Sie, dass dazu eventuell eine weitere partielle Integration notwendig ist.

Es ist $F(x) =$ ______ .

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe zweifacher partieller Integration die Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, x^k\, e^{mx}\, T(x)^n$$

bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\sin, \cos\}$ und $(k, m, n) \in \{(2,1,0), (0,1,1), (2,0,1)\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.

Verbotene Wörter int, limit

Vorkenntnisse partielle Integration

Randomisierung Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.

Anpassung Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.7 Magnetfeld Scheibe

Tags	Biot-Savart, Integral
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Eine Kreisscheibe mit Radius R und homogener Flächenladungsdichte σ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse. Ein um die Symmetrieachse rotierender ringförmiger Streifen mit Innenradius r, Breite d und Ladung q erzeugt auf der Scheibe den Strom

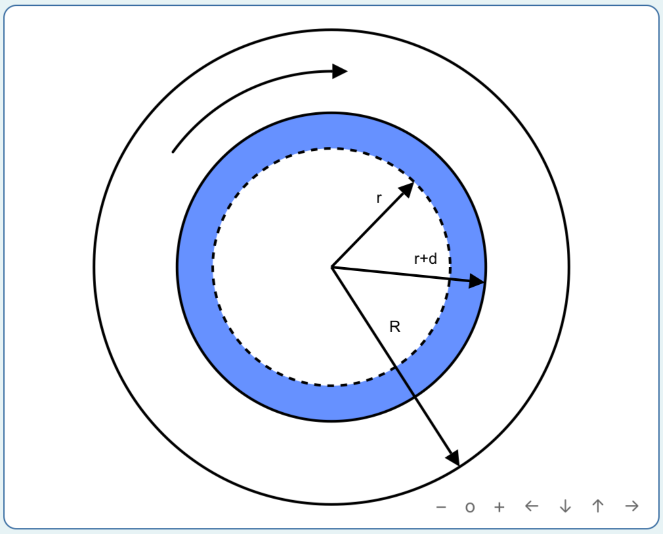
$$I = \omega \frac{q}{2\pi} = \omega\, \sigma\, r\, d$$

Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld, das gemäß des Biot-Savart-Gesetzes an Punkten der Scheibe mit Abstand z zur Rotationsachse die magnetische Flussdichte von Betrag

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathrm{d}r$$

besitzt.

Die folgenden Abbildung zeigt exemplarisch die Kreisscheibe und den ringförmigen Streifen.



(a) Bestimmen Sie den Betrag $B(z)$ der magnetischen Flussdichte an Punkten der Scheibe mit Abstand z zur Rotationsachse.

Es ist $B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \cdot$ ________ .

(b) Bestimmen Sie den Betrag $B(0)$ der magnetischen Flussdichte am Schnittpunkt der Scheibe und ihrer Rotationachse.

Es ist $B(0) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \cdot$ ________ .

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	Eine Kreisscheibe homogener Flächenladungsdichte rotiert mir konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Symmetrieachse. Ein um die Symmetrieachse rotierender ringförmiger Streifen erzeugt auf der Scheibe einen Strom. Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld. In Aufgabenteil (a) soll mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes die magnetische Flussdichte an Punkten der Schreibe bestimmt und in Abhängigkeit des Abstands zur Rotationsachse angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die magnetische Flussdichte am Schnittpunkt der Scheibe und ihrer Rotationsachse bestimmt werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.5.3.8 Yukawa-Potential Ladungsdichte

Tags Biot-Savart, Integral

Screenshot (Stand 03.09.2024)

> Das Yukawa-Potential
>
> $$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$
>
> (in Kugelkoordinaten) ist eine Verallgemeinerung des Coulomb-Potentials und beschreibt das Potential von Austauschteilchen, wie sie bei der Restwechselwirkung der starken Wechselwirkung und in Supraleitern auftreten. Hervorgerufen wird das Potential durch die Yukawa-Wechselwirkung. Es bezeichne ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, q die Ladung der Quelle, die das Potential erzeugt, und a die Abklinglänge des Potentials.
>
> Die Ladungsdichte des Yukawa-Potentials ist für $r > 0$ gegeben als
>
> $$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$
>
> ---
>
> Bestimmen Sie die Gesamtladung
>
> $$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \rho(r) \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi,$$
>
> die sich im gesamten Raum befindet.
>
> Es ist $Q =$ ______ .

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll aus dem Yukawa-Potential $\phi(r)$ und der Yukawa-Ladungsdichte $\rho(r)$ in Kugelkoordinaten die Gesamtladung Q, die sich im Raum befindet, bestimmt werden.

Verbotene Wörter int, limit

Vorkenntnisse Integration

Randomisierung keine

Anpassung keine

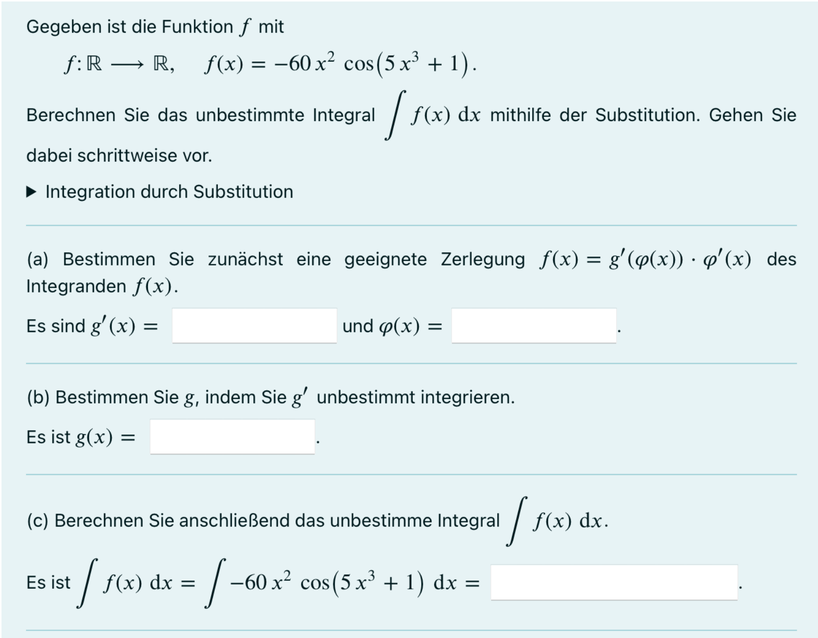
Sonderoption Feedback unterdrücken: nein

3.5.4 Integration durch Substitution

3.5.4.1 Integration durch Substitution (1)

Tags: Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Integration durch Substitution berechnet werden, wobei f eine Komposition von differenzierbaren Funktionen g und φ ist mit

$$f(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für g' und φ angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann das unbestimmte Integral über g' berechnet werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der Aufgabenteile (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse: Substitution, Integral

Randomisierung: Die Funktionen g und φ werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

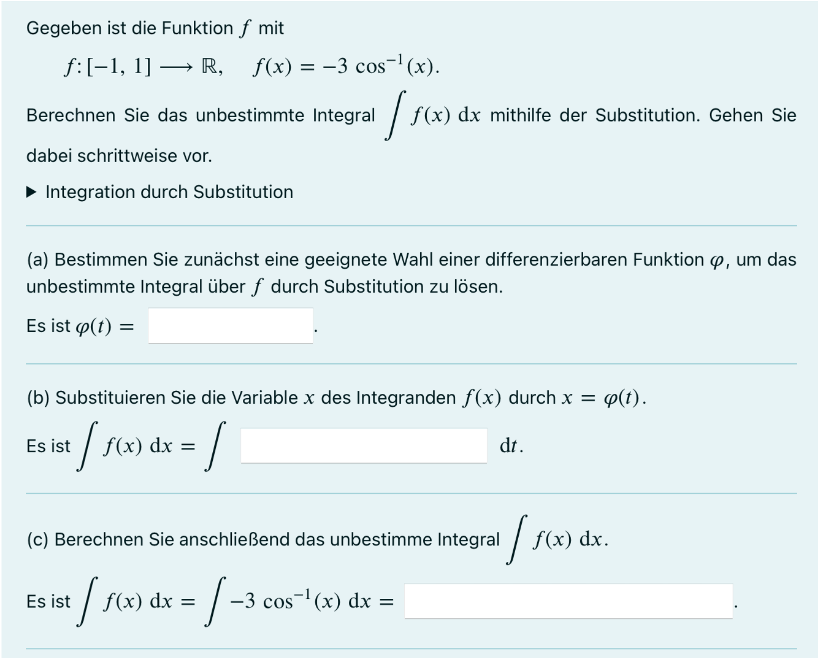
Anpassung: Die Liste der Funktionen für g und φ kann angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.2 Integration durch Substitution (2)

Tags Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon [-1,\,1] \longrightarrow \mathbb{R},\qquad f(x) = -3\,\cos^{-1}(x).$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Substitution. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Wahl einer differenzierbaren Funktion φ, um das unbestimmte Integral über f durch Substitution zu lösen.

Es ist $\varphi(t) =$ ______ .

(b) Substituieren Sie die Variable x des Integranden $f(x)$ durch $x = \varphi(t)$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int$ ______ $\mathrm{d}t$.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -3\,\cos^{-1}(x)\,\mathrm{d}x =$ ______ .

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Integration durch Substitution berechnet werden, wobei es eine injektive, differenzierbare Funktion φ gibt mit

$$x = \varphi(t).$$

In Aufgabenteil (a) soll zunächst eine geeignete Wahl für φ angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann die Variable x des Integranden $f(x)$ durch $x = \varphi(t)$ substituiert werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der Aufgabenteile (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse Substitution, Integral

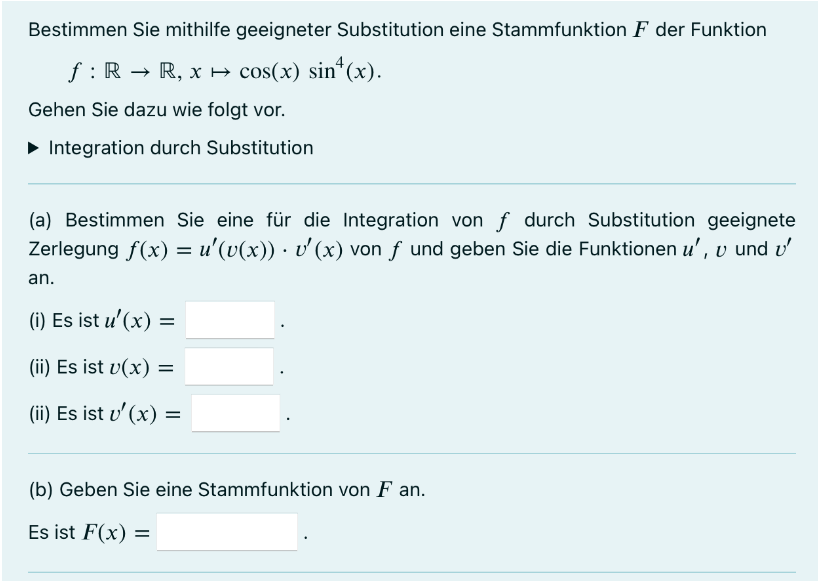
Randomisierung Die Funktionen f und φ werden randomisiert aus einer Liste von (differenzierbaren) Funktionen gewählt.

Anpassung Die Liste der Funktionen für f und φ kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.3 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (1)

Tags	Substitution, Integral, Integration, trigonometrische Funktion
Screenshot	(Stand 04.09.2024)


Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitution eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)\ \sin^4(x).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie eine für die Integration von f durch Substitution geeignete Zerlegung $f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u', v und v' an.

(i) Es ist $u'(x) =$.

(ii) Es ist $v(x) =$.

(ii) Es ist $v'(x) =$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

Es ist $F(x) =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe geeigneter Substitution die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $$f(x) = T(x)^{k-1}\, T'(x)$$ oder $$f(x) = T(x^k)\, x^{k-1}$$ bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\pm \sin, \pm \cos\}$ und $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u', v und v' bestimmt werden, die eine Zerlegung $f(x) = u'(v(x))\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration durch Substitution
Randomisierung	Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u', v und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.4 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (2)

Tags Substitution, Integral, Integration, e-Funktion, ln-Funktion

Screenshot (Stand 04.09.2024)

Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitution eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2\, e^{x^3+2}.$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von f. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie eine für die Integration von f durch Substitution geeignete Zerlegung $f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u', v und v' an.

(i) Es ist $u'(x) =$ ______ .

(ii) Es ist $v(x) =$ ______ .

(ii) Es ist $v'(x) =$ ______ .

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

Es ist $F(x) =$ ______ .

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe geeigneter Substitution die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{(a - e^x)}}$$

oder

$$f(x) = \phi(x^k + a)\, x^{k-1}$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von f bestimmt werden. Dabei sind $\phi \in \{\exp, \ln\}$ und $a, k \in \{2, 3, 5\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u', v und v' bestimmt werden, die eine Zerlegung $f(x) = u'(v(x))\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.

Verbotene Wörter int, limit

Vorkenntnisse Integration durch Substitution

Randomisierung Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.

Anpassung Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u', v und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.

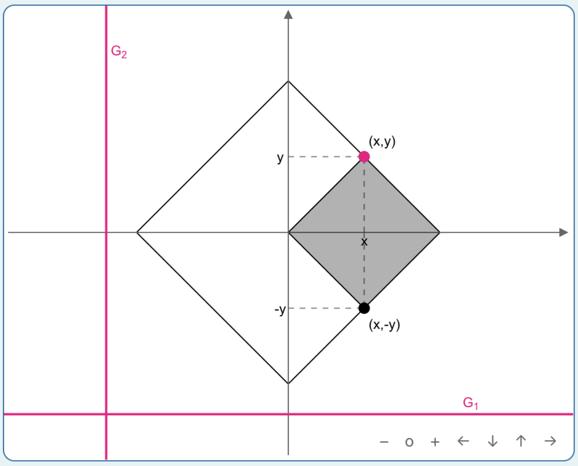
Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.5 Kreissektor (1)

Tags	Integration, Flächeninhalt
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Sei (x, y) ein Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$ der 1-Norm (oder Summennorm) in $\mathbb{R}^2$ mit $y > 0$. Untersuchen Sie den durch die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ bestimmten Kreissektor S, der die x-Halbachse der nicht negativen reellen Zahlen schneidet. Zerlegen Sie S in geeignete Teilflächen und berechnen Sie den Flächeninhalt von S als Linearkombination der Flächeninhalte der Teilflächen. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Beachten Sie, dass Ihre Antwort zu jedem Aufgabenteil nur dann bewertet wird, falls Sie den vorangegangenen Aufgabenteil bearbeitet haben.

Die folgende Abbildung zeigt den Kreissektor S. Der Punkt (x, y) lässt sich entlang des oberen Halbkreises verschieben. Die Gerade G_1 parallel zur x-Achse und die Gerade G_2 parallel zur y-Achse erlauben es Ihnen, S in geeignete Teilflächen zu zerlegen (siehe Aufgabenteil (a)).



(a) Wählen Sie $(x, y) \in S^1$ mit $x \neq 0$ und $y > 0$, indem Sie den Punkt (x, y) (roter Punkt) in der obigen Abbildung des Kreissektors S entlang des oberen Halbkreises verschieben. Zerlegen Sie S dann so in geeignete Teilflächen, dass sich jede der Teilflächen als die Fläche zwischen den Graphen zweier geschlossen darstellbarer Funktionen über der x-Achse beschreiben lässt. Verschieben Sie dazu die Gerade G_1 (rote Gerade parallel zur x-Achse) und die Gerade G_2 (rote Gerade parallel zur y-Achse) in der obigen Abbildung von S.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabenteil (a) von Ihnen gewählten Teilflächen und deren beschreibender Funktionen zwei positive Funktionen f_1, f_2 über der x-Achse und Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, sodass deren Integrale

$$\int_{a_i}^{b_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t,\ i \in \{1, 2\} \quad (*)$$

mit den Flächeninhalten der Teilflächen übereinstimmen. Wählen Sie dazu f_1, um den Flächeninhalt der Teilflächen linksseitig von G_2 zu beschreiben, und wählen Sie dazu f_2, um den Flächeninhalt der Teilflächen rechtsseitig von G_2 zu beschreiben, und geben Sie f_1, f_2 in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $f_1(t) =$ ______ mit $a_1 =$ ___ und $b_1 =$ ___.

(ii) Es ist $f_2(t) =$ ______ mit $a_2 =$ ___ und $b_2 =$ ___.

(c) Berechnen Sie die Integrale ($*$) der von Ihnen in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen f_1, f_2 auf den Intervallen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und geben Sie diese in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $\int_{a_1}^{b_1} f_1(t)\,\mathrm{d}t =$.

(ii) Es ist $\int_{a_2}^{b_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t =$.

(d) Der Flächeninhalt $F(x)$ von S ist abhängig von x und definiert eine geschlossen darstellbare Funktion $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$. Geben Sie den Flächeninhalt $F(x)$ mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (c) angegebenen Flächeninhalte der entsprechenden Teilstücke an, indem Sie y geeignet ersetzen.

Es ist $F(x) =$.

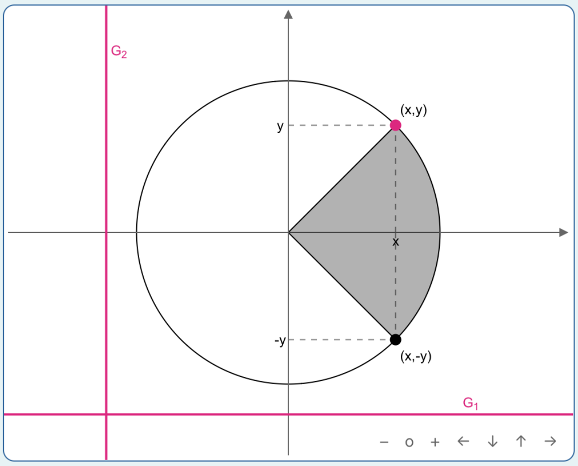
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll ein Kreissektor der Einheitskreisscheibe bezüglich der 1-Norm (Summennorm) als Fläche zwischen Graphen von Funktionen über der x-Achse beschrieben und dessen Flächeninhalt durch Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu zunächst ein beliebiger, den Kreissektor definierender Punkt auf dem oberen Halbkreis ausgewählt und der Kreissektor graphisch, durch Wahl geeigneter Geraden parallel zur x- und y-Achse in Teilflächen zerlegt werden. In Aufgabenteil (b) sollen geschlossen darstellbare positive Funktionen und deren Definitionsbereiche angegeben werden, sodass sie die Teilflächen des Kreissektors als Flächen zwischen ihren Graphen beschreiben. In Aufgabenteil (c) sollen die Flächeninhalte der Teilfächen durch Integration der in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen berechnet werden. In Aufgabenteil (d) soll schließlich der Flächeninhalt des Kreissektors mithilfe der in Aufgabenteil (c) berechneten Flächeninhalte der Teilflächen berechnet werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration polynomieller Funktionen
Randomisierung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.6 Kreissektor (2)

Tags	Integration, Flächeninhalt, partielle Integration, Substitution, trigonometrische Funktion
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Sei (x, y) ein Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der 2-Norm (oder euklidischen Norm) in $\mathbb{R}^2$ mit $y > 0$. Untersuchen Sie den durch die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ bestimmten Kreissektor S, der die x-Halbachse der nicht negativen reellen Zahlen schneidet. Zerlegen Sie S in geeignete Teilflächen und berechnen Sie den Flächeninhalt von S als Linearkombination der Flächeninhalte der Teilflächen. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Beachten Sie, dass Ihre Antwort zu jedem Aufgabenteil nur dann bewertet wird, falls Sie den vorangegangenen Aufgabenteil bearbeitet haben.

Die folgende Abbildung zeigt den Kreissektor S. Der Punkt (x, y) lässt sich entlang des oberen Halbkreises verschieben. Die Gerade G_1 parallel zur x-Achse und die Gerade G_2 parallel zur y-Achse erlauben es Ihnen, S in geeignete Teilflächen zu zerlegen (siehe Aufgabenteil (a)).



(a) Wählen Sie $(x, y) \in S^1$ mit $x \neq 0$ und $y > 0$, indem Sie den Punkt (x, y) (roter Punkt) in der obigen Abbildung des Kreissektors S entlang des oberen Halbkreises verschieben. Zerlegen Sie S dann so in geeignete Teilflächen, dass sich jede der Teilflächen als die Fläche zwischen den Graphen zweier geschlossen darstellbarer Funktionen über der x-Achse beschreiben lässt. Verschieben Sie dazu die Gerade G_1 (rote Gerade parallel zur x-Achse) und die Gerade G_2 (rote Gerade parallel zur y-Achse) in der obigen Abbildung von S.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabenteil (a) von Ihnen gewählten Teilflächen und deren beschreibender Funktionen zwei positive Funktionen f_1, f_2 über der x-Achse und Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, sodass deren Integrale

$$\int_{a_i}^{b_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t,\ i \in \{1, 2\} \qquad (*)$$

mit den Flächeninhalten der Teilflächen übereinstimmen. Wählen Sie dazu f_1, um den Flächeninhalt der Teilflächen linksseitig von G_2 zu beschreiben, und wählen Sie dazu f_2, um den Flächeninhalt der Teilflächen rechtsseitig von G_2 zu beschreiben, und geben Sie f_1, f_2 in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $f_1(t) =$ ______ mit $a_1 =$ ___ und $b_1 =$ ___.

(ii) Es ist $f_2(t) =$ ______ mit $a_2 =$ ___ und $b_2 =$ ___.

(c) Berechnen Sie die Integrale $(*)$ der von Ihnen in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen f_1, f_2 auf den Intervallen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und geben Sie diese in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an. In Abhängigkeit der von Ihnen gewählten Teilflächen bietet sich die Substitution $t = \cos(s)$ an. Geben Sie den Arkussinus und Arkuskosinus von x als `asin(x)` bzw. `acos(x)` ein.

(i) Es ist $\int_{a_1}^{b_1} f_1(t)\,\mathrm{d}t =$ ______ .

(ii) Es ist $\int_{a_2}^{b_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t =$ ______ .

(d) Der Flächeninhalt $F(x)$ von S ist abhängig von x und definiert eine geschlossen darstellbare Funktion $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$. Geben Sie den Flächeninhalt $F(x)$ mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (c) angegebenen Flächeninhalte der entsprechenden Teilstücke an, indem Sie y geeignet ersetzen.

Es ist $F(x) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll ein Kreissektor der Einheitskreisscheibe bezüglich der 2-Norm (Summennorm) als Fläche zwischen Graphen von Funktionen über der x-Achse beschrieben und dessen Flächeninhalt durch Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu zunächst ein beliebiger, den Kreissektor definierender Punkt auf dem oberen Halbkreis ausgewählt und der Kreissektor graphisch, durch Wahl geeigneter Geraden parallel zur x- und y-Achse in Teilflächen zerlegt werden. In Aufgabenteil (b) sollen geschlossen darstellbare positive Funktionen und deren Definitionsbereiche angegeben werden, sodass sie die Teilflächen des Kreissektors als Flächen zwischen ihren Graphen beschreiben. In Aufgabenteil (c) sollen die Flächeninhalte der Teilfächen durch Integration der in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen berechnet werden. In Aufgabenteil (d) soll schließlich der Flächeninhalt des Kreissektors mithilfe der in Aufgabenteil (c) berechneten Flächeninhalte der Teilflächen berechnet werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration polynomieller Funktionen
Randomisierung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.7 Deep Space 1

Tags: Integral, Integration, Substitution, SI Einheiten, Signifikante Stellen

Screenshot: (Stand 03.09.2024)

Untersuchen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes

$$F = m\,a$$

den Zusammenhang zwischen der Schubkraft F, der Masse m und der Beschleunigung a des Satelliten Deep Space 1.

Der Satellit Deep Space 1 hat eine Gesamtmasse m_0 von $486\,\mathrm{kg}$, inklusive $82\,\mathrm{kg}$ Xenon für das Ionentriebwerk. Das Ionentriebwerk NSTAR des Satelliten Deep Space 1 erzeugt einen maximalen Schub von $9.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$. Die Rate mit der das Ionentriebwerk Xenon ausstößt wird im Folgenden als proportional zum Schub angenommen.

Berechnen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes die Differenzgeschwindigkeit

$$\Delta v = \int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

die Deep Space 1 erreicht, wenn der Satellit für die Zeit T von 225 Tagen mit konstant maximalem Schub F beschleunigen und dabei die Masse Δm von insgesamt $60\,\mathrm{kg}$ Xenon ausstoßen würde, und geben Sie Δv in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf 2 signifikante Stellen genau an. Weitere physikalische Effekte, die gegebenenfalls Einfluss auf Δv haben, werden vernachlässigt.

Es ist $\Delta v =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe des 2. Newtonsches Gesetzes (siehe auch Aufgabe 1.1.2.1) die Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta v = \int_0^T \frac{F}{m(t)}\,\mathrm{d}t$$

des Satelliten Deep Space 1 angegeben werden, wenn dieser mit gegebenem konstanten Schub F und veränderlicher Masse m für die Zeit T beschleunigt wird. Die Rate, mit der der Satellit Masse ausstößt, wird dabei proportional zum Schub und damit als konstant angenommen. Die Geschwindigkeitsänderung soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.

Verbotene Wörter: int, limit

Vorkenntnisse: Begriffe zur Charakterisierung reeller Funktionen (Proportionalität, Rate), Integration durch Substitution

Randomisierung: Die ausgestoßene Masse und die Zeit der Beschleunigung werden als Produkt eines zufällig als 2, 3 oder 4 gewählten Faktors und den Basiswerten $20\,\mathrm{kg}$ bzw. 75 Tagen gewählt.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.8 Elektrisches Radialfeld

Tags Integral, Integration, Substitution, Kurvenintegral, Skalarprodukt

Screenshot (Stand 03.09.2024)

Das Coulombsche Gesetz

$$\vec{F} = \frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^2}\,\frac{\vec{x}_q - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|}$$

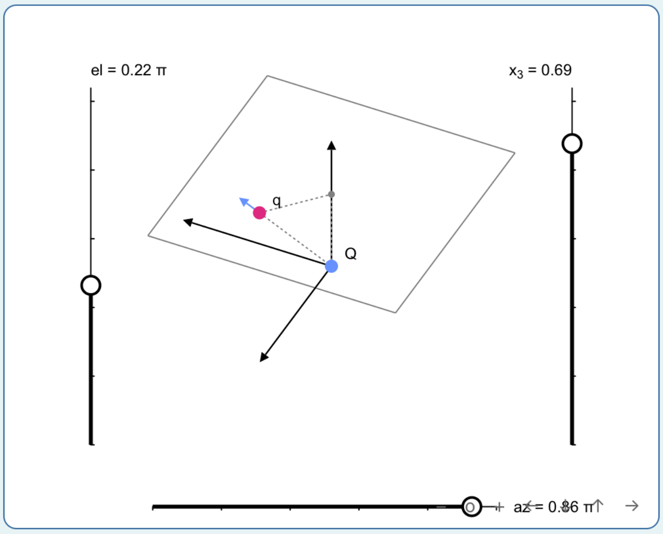
beschreibt die Kraft $\vec{F}$, die eine kugelsymmetrische Probeladung q im elektrischen Feld einer kugelsymmetrischen Ladung Q erfährt. Dabei bezeichne $\vec{x}_q$ die Postion der Probeladung q, $\vec{x}_Q$ die Position der Ladung Q und $\varepsilon_0 > 0$ die elektrische Feldkonstante. Im Folgenden wird angenommen, dass sich die Ladung Q am Koordinatenursprung befindet und damit $\vec{x}_Q = \vec{0}$ ist.

Zeigen Sie, dass die elektrische Arbeit

$$W = \int_0^1 \dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

die aufgewendet werden muss, um die Probeladung q entlang einer auf dem Interval $[0,1]$ definierten Kurve $\vec{c}$ im elektrischen Feld zu verschieben, von dem Anfangspunkt $\vec{c}(0)$ und dem Endpunkt $\vec{c}(1)$, nicht aber von der Kurve $\vec{c}$ (bzw. deren Spur) abhängt. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt die Probeladung q (Punkt ●), die Ladung Q (Punkt ●) und die auf q wirkende elektrische Feldkraft $\vec{F}$ als Vektorpfeil (Pfeil →) angeheftet an q in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem. Die Ladungen werden als gleichnamig angenommen, sodass $q\,Q > 0$ ist. Die Koordinatenachsen werden durch drei paarweise senkrechte Vektorpfeile angeheftet an Q dargestellt (Pfeile →).



(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t))$ und geben Sie es als Vielfaches von $\frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ in Abhängigkeit des euklidischen Abstands $r(t) = |\vec{c}(t)|$ von q und Q an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $r(t)$ und $r'(t)$ als `r(t)` bzw. `diff(r(t),t)` ein.

Es ist $\dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t)) = \frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die elektrische Arbeit W und geben Sie sie als Vielfaches von $\frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ in Abhängigkeit von $r(0)$ und $r(1)$ an.

Es ist $W = \frac{Q\,q}{4\,\pi\varepsilon_0}$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die elektrische Arbeit $$W = \int_0^1 \dot{c}(t) \cdot F(c(t))\, dt,$$ die aufgewendet wird, um eine Probeladung q entlang einer Kurve c in dem elektrischen Radialfeld einer Ladung Q zu verschieben, unabhängig von der Spur von $c([0,1])$ ist. In Aufgabenteil (a) soll dazu mithilfe des Coulomb-Gesetzes der Integrand $\dot{c}(t) \cdot F(c(t))$ in Abhängigkeit des Abstands von q und Q angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll das Integral bestimmt werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kurvenintegrale, Integration durch Substitution, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.5 Integration durch Partialbruchzerlegung

3.5.5.1 Partialbruchzerlegung

Tags Integral, Stammfunktion, Partialbruchzerlegung

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int -\frac{13\,x^2+172\,x+508}{x^3+13\,x^2+4\,x-288}\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Partialbruchzerlegung. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Partialbruchzerlegung

(a) Geben Sie zunächst eine geeignete Faktorisierung $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ in paarweise verschiedene Nullstellen des Nenners

$$q(x) = x^3+13\,x^2+4\,x-288$$

an.

Es ist $q(x) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{13\,x^2+172\,x+508}{x^3+13\,x^2+4\,x-288} = \frac{c_1}{x-x_1}+\frac{c_2}{x-x_2}+\frac{c_3}{x-x_3}$$

und zerlegen Sie damit das unbestimmte Integral

$$\int -\frac{13\,x^2+172\,x+508}{x^3+13\,x^2+4\,x-288}\,\mathrm{d}x = \int \frac{c_1}{x-x_1}+\frac{c_2}{x-x_2}+\frac{c_3}{x-x_3}\,\mathrm{d}x.$$

Es ist $\int -\frac{13\,x^2+172\,x+508}{x^3+13\,x^2+4\,x-288}\,\mathrm{d}x = \int$ ______ $\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimmte Integral

$$I = \int -\frac{13\,x^2+172\,x+508}{x^3+13\,x^2+4\,x-288}\,\mathrm{d}x.$$

Es ist $I =$ ______.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Partialbruchzerlegung bestimmt werden, wobei p und q Polynomfunktionen mit $\deg(p) < \deg(q)$ sind. In Aufgabenteil (a) soll zunächst der Nenner $q(x)$ geeignet in paarweise Nullstellen von q faktorisiert werden. In Aufgabenteil (b) soll das unbestimmte Integral anschließend mithilfe der Partialbruchzerlegung zerlegt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über $\frac{p}{q}$ anhand von (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse Partialbruchzerlegung, unbestimmte Integrale

Randomisierung Die Polynomfunktionen p und q sind Produkte von Linearfaktoren mit randomisierten, ganzzahligen Nullstellen, sodass p und q teilerfremd sind.

Anpassung	Die Partialbruchzerlegung kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.6 Uneigentliche Integrale

3.5.6.1 Uneigentliches Integral (1)

Tags	Uneigentliches Integral, Stammfunktion, Parameter, Integral
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

wobei $p > 0$ anzunehmen ist. Bestimmen Sie, für welche $p \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion F zu f, indem Sie das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass $p \neq 1$ gilt. Sie dürfen die Integrationskonstante C vernachlässigen.

Es ist $F(x) =$ ______.

(b) Geben Sie nun eine Stammfunktion F an, wenn $p = 1$ gilt. Sie dürfen erneut die Integrationskonstante C vernachlässigen.

Es ist $F(x) =$ ______.

(c) Für welche $p \in \mathbb{R}$ hat dann das uneigentliche Integral

$$I = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

einen endlichen Wert? Markieren Sie die richtige Antwort.

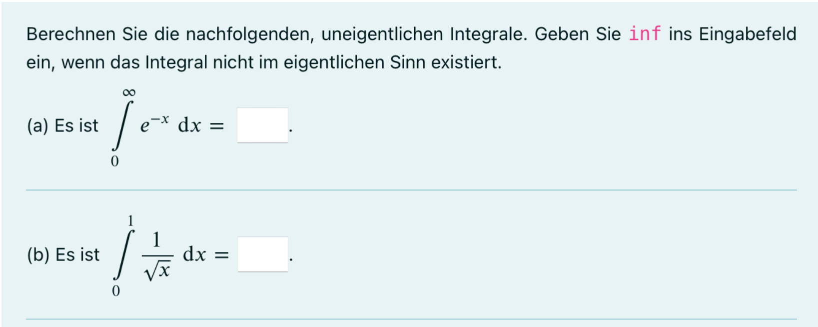
- ○ Das uneigentliche Integral I hat für $p < 0$ einen endlichen Wert.
- ○ Das uneigentliche Integral I hat für $p > 0$ einen endlichen Wert.
- ○ Das uneigentliche Integral I hat für $p > 1$ einen endlichen Wert.
- ○ Das uneigentliche Integral I hat für $p < 1$ einen endlichen Wert.
- ○ Das uneigentliche Integral I hat für kein reelles p einen endlichen Wert.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion f mit $$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^p}$$ für $p > 0$ gegeben. Es soll bestimmt werden, für welche $p \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$ existiert. In Aufgabenteil (a) soll zunächst eine Stammfunktion F zu f für den Fall $p \neq 1$ berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll dann eine Stammfunktion F zu f für den Fall $p = 1$ angegeben werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich entschieden werden, für welche reelle Zahlen p dann das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ einen endlichen Wert hat.
Vorkenntnisse	Uneigentliche Integrale, Grenzwerte
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.6.2 Uneigentliches Integral (2)

Tags	Uneigentliches Integral, Stammfunktion, Integral
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Berechnen Sie die nachfolgenden, uneigentlichen Integrale. Geben Sie inf ins Eingabefeld ein, wenn das Integral nicht im eigentlichen Sinn existiert.

(a) Es ist $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x =$ ___ .

(b) Es ist $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$ ___ .

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In Aufgabenteil (a) soll das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden.

Vorkenntnisse	Uneigentliche Integrale, Grenzwerte
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja