3.4 Differentialrechnung

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen. Sie umfassen die Untersuchung der Differenzierbarkeit und die Bestimmung der Ableitung sowohl elementarer Funktionen als auch Kompositionen von Funktionen. In weiteren Aufgaben werden die Ketten- und Produktregel sowie die Ableitung von Quotienten auf beispielhaft angewendet.

Inhaltsverzeichnis

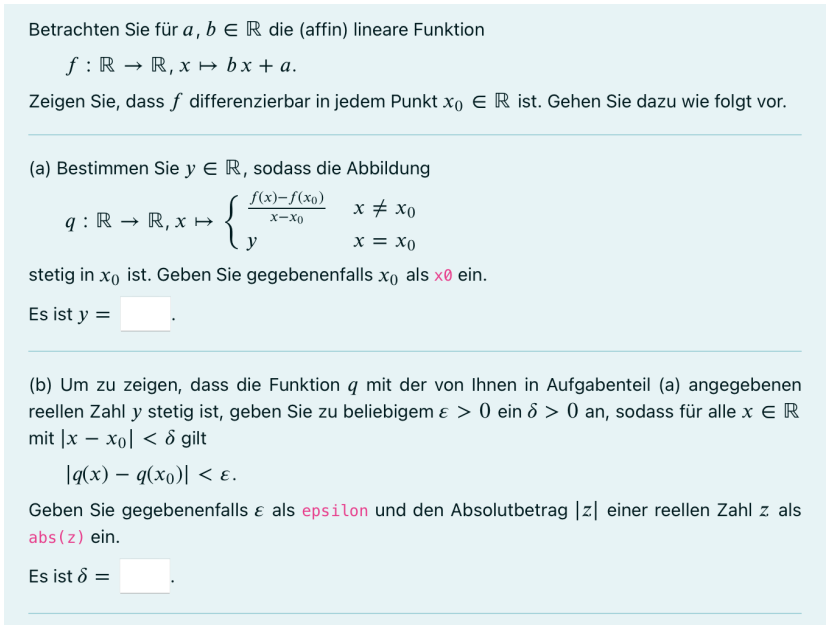
3.4.1 Differenzierbarkeit elementarer Abbildungen . . . 172
3.4.1.1 Differenzierbarkeit (affin) linearer Funktionen . . . 172
3.4.1.2 Differenzierbarkeit quadratischer Funktionen . . . 173
3.4.1.3 Differenzierbarkeit von Kompositionen . . . 174
3.4.1.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 175
3.4.2 Bestimmung von Ableitungen und Rechenregeln . . . 176
3.4.2.1 Ableitung Kettenregel . . . 176
3.4.2.2 Ableitung Produktregel . . . 177
3.4.2.3 Ableitung Quotient . . . 178
3.4.2.4 Differentialrechnung Grundlagen (1) . . . 179
3.4.2.5 Differentialrechnung Grundlagen (2) . . . 180
3.4.2.6 Differentialrechnung Grundlagen (3) . . . 181

Dieser Textauszug stammt aus „Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ von Hakim Günther (WH), Tim Inoue (WH), Dr. Michael Kubocz (RWTH), Dr. Benjamin Schulz-Rosenberger (RUB) und Emma van der Smagt (RUB) und steht unter der Lizenz *Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International (CC BY-SA 4.0)*. Die Lizenzbedingungen können unter https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de eingesehen werden.

3.4.1 Differenzierbarkeit elementarer Abbildungen

3.4.1.1 Differenzierbarkeit (affin) linearer Funktionen

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Lineare Funktion
Screenshot	(Stand 16.09.2024)



Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die (affin) lineare Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto b\,x + a.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. Geben Sie gegebenenfalls x_0 als `x0` ein.

Es ist $y =$.

(b) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` und den Absolutbetrag $|z|$ einer reellen Zahl z als `abs(z)` ein.

Es ist $\delta =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer allgemeinen (affin) linearen Funktion gezeigt und ihrer Ableitung bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.1.2 Differenzierbarkeit quadratischer Funktionen

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Quadratische Funktion
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c\,x^2 + b\,x + a.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. Geben Sie gegebenenfalls x_0 als `x0` ein.

Es ist $y =$.

(b) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` und den Absolutbetrag $|z|$ einer reellen Zahl z als `abs(z)` ein.

▶ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Es ist $\delta =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer allgemeinen quadratischen Funktion gezeigt und ihrer Ableitung bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.1.3 Differenzierbarkeit von Kompositionen

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Kettenregel, Produktregel
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.

(a) Aus der Ketten- und der Produktregel folgt, dass die Restriktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung g' von g.

Es ist $g'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist.

Es ist $y =$.

(c) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (b) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` ein.

▶ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Es ist $\delta =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und mit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ bewiesen werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu die Ableitung von f mithilfe der Ketten- und der Produktregel außerhalb von null bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll dann eine stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten an null bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll die Stetigkeit der in Aufgabenteil (b) angegebenen Fortsetzung des Differenzenquotienten an null bewiesen werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen, Ketten- und Produktregel
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.1.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Betrag, Betragsfunktion
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|.$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht differenzierbar in null ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` ein.

Es ist $\delta =$.

(b) Betrachten Sie für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}.$$

Geben Sie für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x - 0| < \delta$ an, sodass

$$|q(x) - q(0)| \geq 1.$$

ist. Unterscheiden Sie dabei die folgenden drei Fälle. Geben Sie gegebenenfalls δ als `delta` ein.

(i) Für $y = 0$ ist $x =$.

(ii) Für $y < 0$ ist $x =$.

(iii) Für $y > 0$ ist $x =$.

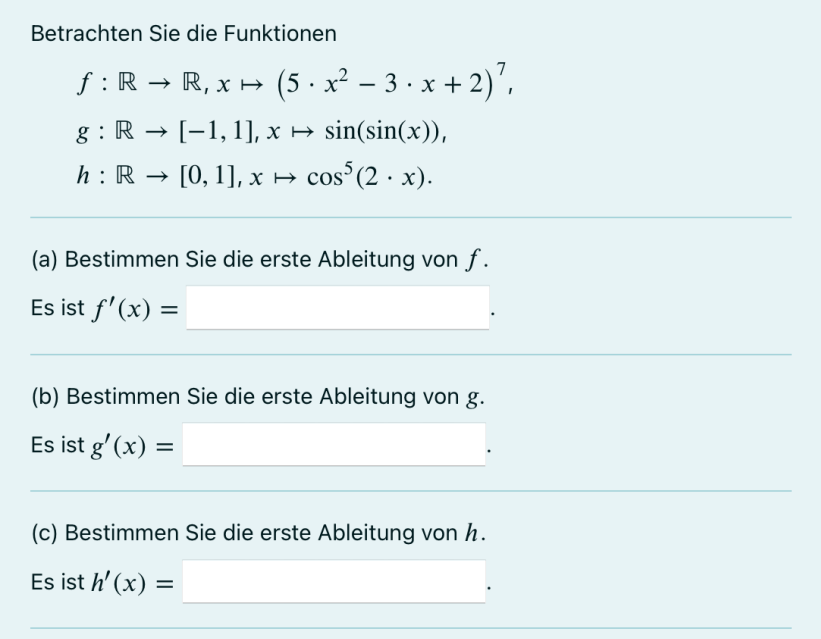
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Betragsfunktion stetig, aber nicht differenzierbar in null ist. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass die Betragsfunktion stetig in null ist. In Aufgabenteil (b) soll gezeigt werden, dass der Differenzenquotient an null keine stetige Fortsetzung besitzt.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen, Betragsfunktion
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2 Bestimmung von Ableitungen und Rechenregeln

3.4.2.1 Ableitung Kettenregel

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitung von Potenz-, Sinus- und Kosinusfunktionen.
Randomisierung	Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten und Exponenten generiert:

- $f(x)$ ist eine Potenzfunktion mit einem Polynom als Basis
- $g(x)$ ist eine verkettete Sinusfunktion
- $h(x)$ ist eine Potenz einer Kosinusfunktion

Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2.2 Ableitung Produktregel

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} \cdot e^{-2 \cdot x}$,

$g : (\frac{1}{8}, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{4 \cdot x} \cdot \ln(8 \cdot x)$,

$h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 \cdot x^2 \cdot \ln(x) \cdot \sin(8 \cdot x)$.

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von $h(x)$.

Es ist $h'(x) =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind drei Funktionen f(x), g(x), und h(x). Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Produktregel anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Produktregel, Ableitung von Exponential-, Logarithmus-, Potenz- und trigonometrischen Funktionen.
Randomisierung	Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten generiert: • $f(x)$ ist das Produkt einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion • $g(x)$ ist das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Logarithmusfunktion • $h(x)$ ist das Produkt einer polynomialen Funktion, einer Logarithmusfunktion und einer Sinusfunktion
Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden. Aktuell werden Werte zwischen 1 und 9 für die Koeffizienten verwendet.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2.3 Ableitung Quotient

Tags	Differentialgleichung, Funktion, Ableitung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5\cdot x^4-4\cdot x^5}{4\cdot x^5+3},$$

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\cos(5\cdot x)}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f mithilfe der Quotientenregel.

(i) Es ist $f'(x) =$.

(ii) Es ist $f''(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g mithilfe der Quotientenregel.

Es ist $g'(x) =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Für diese Funktionen sollen die Ableitungen unter Anwendung der Quotientenregel bestimmt werden. Für $f(x)$ ist zusätzlich die zweite Ableitung zu berechnen.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Quotientenregel, Ableitung von Potenz-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen.
Randomisierung	Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten generiert: • $f(x)$ ist der Quotient zweier Polynome • $g(x)$ ist der Quotient einer Logarithmusfunktion und einer Kosinusfunktion
Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden. Aktuell werden Werte zwischen 2 und 6 für die meisten Koeffizienten verwendet.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2.4 Differentialrechnung Grundlagen (1)

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4,$$
$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2},$$
$$h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Potenzregel für verschiedene Exponenten anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Potenzregel für positive, negative und gebrochene Exponenten.
Randomisierung	Die Funktionen werden mit zufälligen Exponenten generiert:

- $f(x) = x^n$, wobei n eine positive ganze Zahl zwischen 2 und 9 ist
- $g(x) = x^n$, wobei n eine negative ganze Zahl zwischen -2 und -9 ist
- $h(x) = x^n$, wobei n ein negativer Bruch ist

Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Exponenten können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2.5 Differentialrechnung Grundlagen (2)

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos(5 \cdot x),$$
$$g : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin\left(\tfrac{5 \cdot x}{4}\right),$$
$$h : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos(3 \cdot \pi \cdot x).$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$, die trigonometrische Funktionen mit linearen Argumenten darstellen. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitungen von Sinus- und Kosinusfunktionen.
Randomisierung	Die Funktionen werden mit zufälligen Koeffizienten generiert:

- $f(x) = \cos(a\,x)$, wobei a eine ganze Zahl zwischen 2 und 9 ist
- $g(x) = \sin(b\,x)$, wobei b ein Bruch ist
- $h(x) = \cos(c\,x)$, wobei c ein Vielfaches von π ist

Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT'" ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.

3.4.2.6 Differentialrechnung Grundlagen (3)

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$f : \mathbb{R} \to (0, \infty), x \mapsto e^{2 \cdot x}$,

$g : \mathbb{R} \to (0, \infty), x \mapsto 2 \cdot e^{-\frac{x}{3}}$,

$h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(5 \cdot x)$,

$t : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$.

(d) Bestimmen Sie die erste Ableitung von t.

Es ist $t'(x) =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind vier Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ und $t(x)$, die exponential- und logarithmische Funktionen mit linearen Argumenten darstellen. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen.
Randomisierung	Die Funktionen werden mit zufälligen Koeffizienten generiert:

- $f(x) = e^{ax}$, wobei a eine ganze Zahl zwischen 2 und 7 ist
- $g(x) = b\,e^{cx}$, wobei b eine ganze Zahl zwischen 3 und 7 ist und c ein negativer Bruch
- $h(x) = \ln(dx)$, wobei d eine ganze Zahl zwischen 2 und 6 ist
- $t(x) = \ln(ex)$, wobei e ein Bruch ist

Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

„Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ ist lizensiert unter CC BY-SA 4.0.