3.3 Stetigkeit

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit reeller Funktionen und den Zusammenhang der Begriffe. Schwerpunkte liegen unter anderem auf der stetigen Fortsetzbarkeit von Funktionen, der Stetigkeit stückweise definierter Funktionen und der Charakterisierung von Stetigkeit vermöge des Funktionsgraphen.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

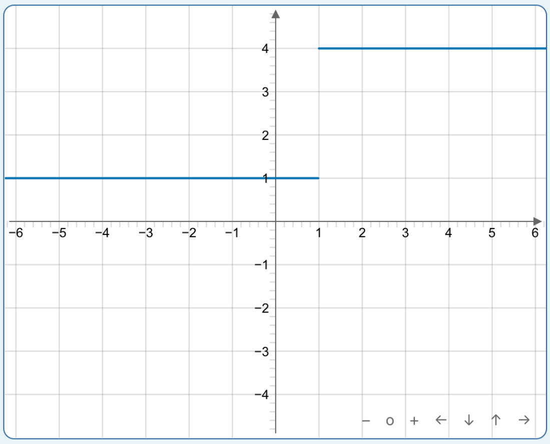
3.3.1 Stetigkeit reeller Funktionen

3.3.1.1 Stetige Funktionen anhand von Graphen

Tags	Stetigkeit, Graphen
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

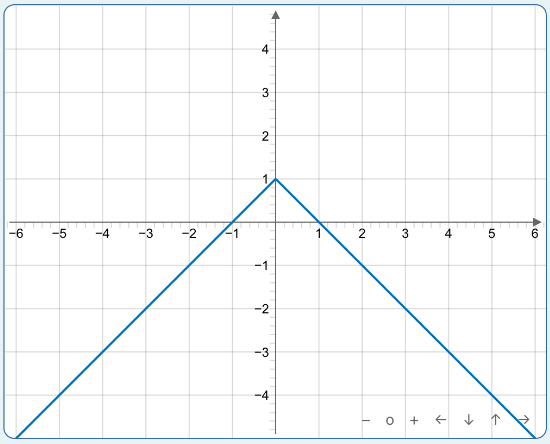
Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen, die jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Entscheiden Sie anhand der Abbildungen, welche Funktionen stetig sind.

(a) Der Graph zur Funktion f ist gegeben durch

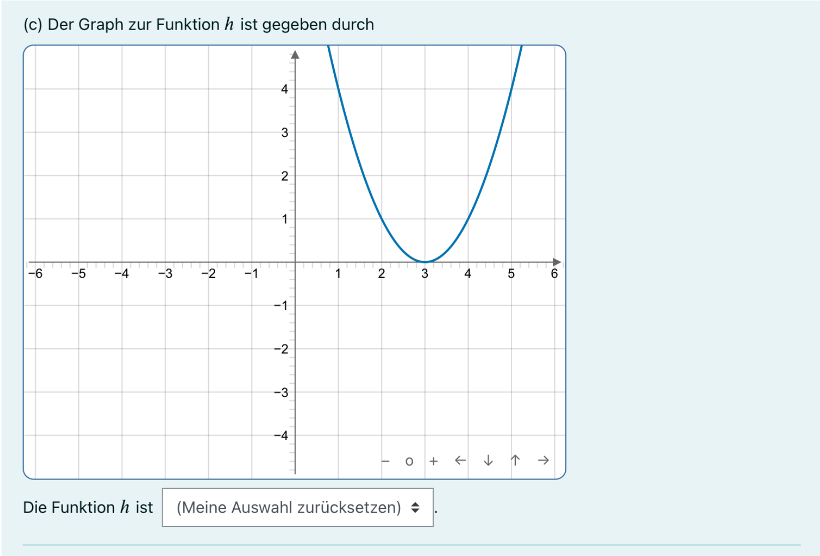


Die Funktion f ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(b) Der Graph zur Funktion g ist gegeben durch



Die Funktion g ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind Graphen Funktionen f, g und $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. In den Aufgabenteilen (a), (b) und (c) soll entschieden werden, ob es sich bei den abgebildeten Funktionen um stetige Funktionen handelt.
Vorkenntnisse	Stetigkeit
Randomisierung	Die abgebildeten Graphen sind aus einer Auswahl von stetigen und nicht-stetigen Funktionen randomisiert ausgewählt.
Anpassung	Die Funktionen können entsprechend angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.2 Stetigkeit mit ε-δ-Definition

Tags — Stetigkeit, epsilon-delta, Funktion

Screenshot — (Stand 06.10.2024)

> Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = 5\,x^2 + 1$$
>
> und der Punkt $x_0 = -3$.
>
> ---
>
> Weisen Sie nach, dass die Funktion f stetig in x_0 ist, indem Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, sodass
>
> $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
>
> für alle $x \in \mathbb{R}$ mit
>
> $$|x - x_0| < \delta$$
>
> gilt. Nehmen Sie dazu an, dass $\delta \leq 1$ einzuhalten ist. Nehmen Sie weiterhin ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$ an. Geben Sie gegebenenfalls ε über `epsilon` ein.
>
> Man kann $\delta = \min(1,$ ______ $)$ wählen.
>
> ▶ Forderung von $\varepsilon < 1$

Autor — Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee — Tim Inoue

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^2 + b$$

und der Punkt $x_0 = c$ gegeben. Für $\varepsilon < 1$ soll ein $\delta \in (0, 1]$ bestimmt werden, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

auch

$$|f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

gilt.

Vorkenntnisse — Stetigkeit, $\varepsilon - \delta$-Kriterium

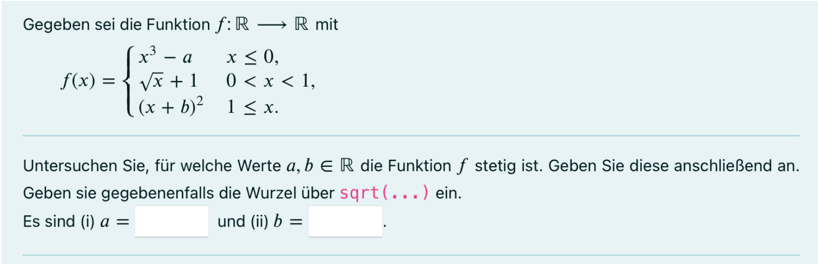
Randomisierung — Die Koeffizienten a, b und c sind randomisierte ganze Zahlen.

Anpassung — Die Funktion f kann angepasst werden, die Wahl von δ ändert sich damit.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.3 Stetigkeit mit Parametern

Tags	Stetigkeit, stetige Fortsetzung, Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion f mit $$f(x) = \begin{cases} x^3 - a & x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 1 & 0 < x < 1, \\ (x+b)^2 & 1 \leq x. \end{cases}$$ gegeben. Es soll untersucht werden, für welche Werte von a und b auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
Vorkenntnisse	Stetigkeit, Grenzwerte, stetige Fortsetzung, Folgenstetigkeit
Randomisierung	keine
Anpassung	Die Funktion f kann mit den Stützstellen a und b angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.4 Stetigkeit mit Fortsetzung

Tags Stetigkeit, stetige Fortsetzung, Funktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion $f\colon (0,\infty) \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^6 - 729}{x^3 - 27}.$$

Bestimmen Sie eine reelle Zahl a, sodass die Funktion $\tilde{f}$ mit

$$\tilde{f}\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} a & x = 3, \\ f(x) & \text{sonst}, \end{cases}$$

stetig ist. Man nennt $\tilde{f}$ die stetige Fortsetzung von f. Geben Sie gegebenenfalls a als Bruch an.

Es ist $a =$ ______.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die Funktion

$$f : (0,\infty) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^{2k} - x_0^{2k}}{x^k - x_0^k}$$

gegeben. Es soll dann so eine reelle Zahl a bestimmt werden, sodass die Funktion

$$\tilde{f}\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} a & x = x_0, \\ f(x) & \text{sonst}, \end{cases}$$

stetig in $x = x_0$ ist.

Vorkenntnisse Stetigkeit, Grenzwerte, stetige Fortsetzung, Folgenstetigkeit

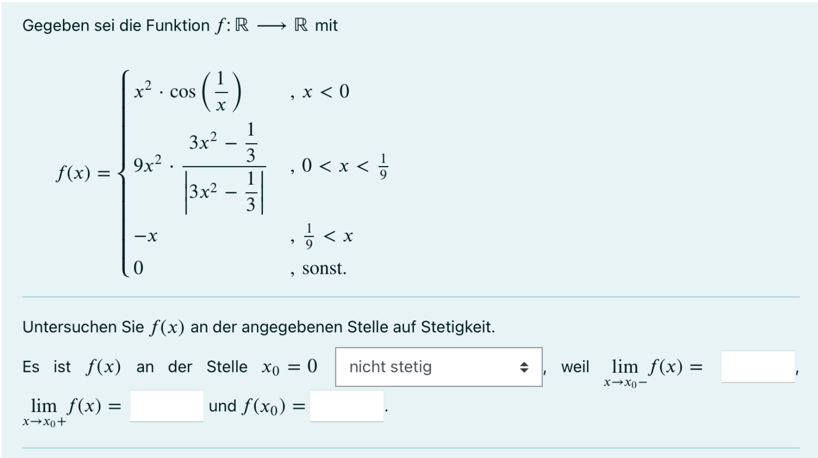
Randomisierung Der Parameter x_0 und der Exponent k sind randomisiert.

Anpassung Die Funktionen f kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.5 Stetigkeit stückweiser Funktionen

Tags	stückweise stetig, Stetigkeit, Funktion
Screenshot	(Stand 26.08.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Leen Jubarah
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die stückweise definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x < 0 \\ 9x^2 \cdot \dfrac{3x^2 - \frac{1}{3}}{\left|3x^2 - \frac{1}{3}\right|} & , 0 < x < \frac{1}{9} \\ -x & , \frac{1}{9} < x \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

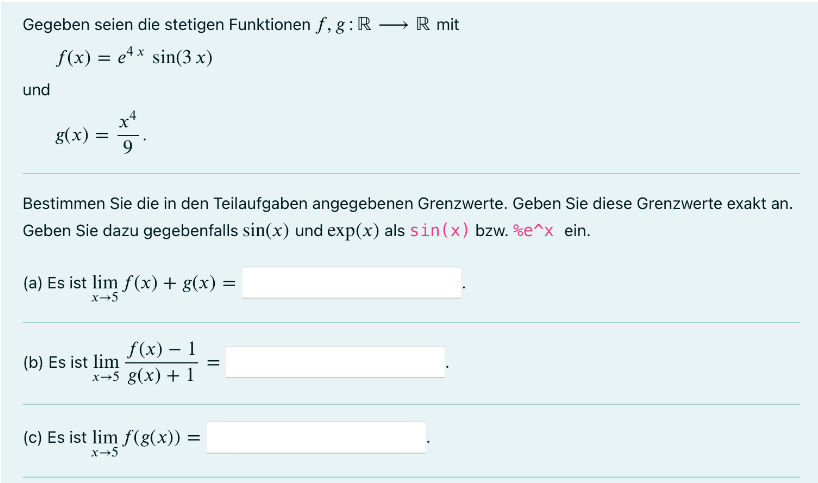
gegeben. Die Funktion f soll an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit untersucht werden.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Folgenstetigkeit
Randomisierung	keine
Anpassung	Die Funktion f kann entsprechend angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.6 Rechenregeln zu Stetigkeit

Tags: Grenzwerte, Stetigkeit

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Gegeben seien die stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{4\,x}\,\sin(3\,x)$$

und

$$g(x) = \frac{x^4}{9}.$$

Bestimmen Sie die in den Teilaufgaben angegebenen Grenzwerte. Geben Sie diese Grenzwerte exakt an. Geben Sie dazu gegebenfalls $\sin(x)$ und $\exp(x)$ als `sin(x)` bzw. `%e^x` ein.

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} f(x) + g(x) =$ ______.

(b) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{f(x)-1}{g(x)+1} =$ ______.

(c) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} f(g(x)) =$ ______.

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sind stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = k \cdot \sin(ax)e^x + (1-k)\cdot\cos(x)e^x$$

und

$$g(x) = \left|\frac{b}{c}x^d\right|$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$$

bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-1}{g(x)+1}$$

bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))$$

bestimmt werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln zu Grenzwerten, Stetigkeit, Folgenstetigkeit

Randomisierung: Die Parameter a, b, c und d sind randomisierte, ganze Zahlen. Die Zahl k ist eine ganzzahlige Zufallszahl zwischen 0 und 1.

Anpassung: Die Funktionen f und g können angepasst werden.

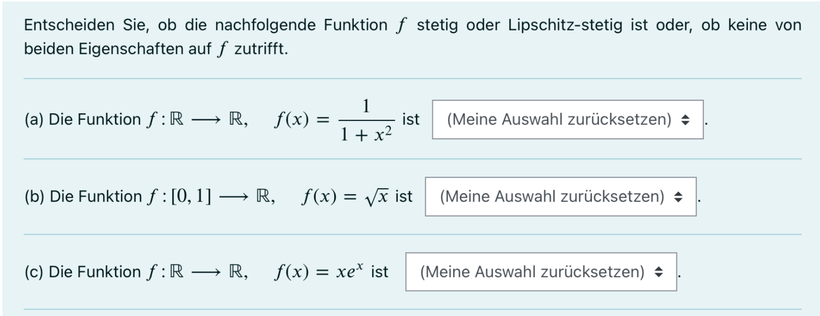
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.3.2 Lipschitz-Stetigkeit

3.3.2.1 Lipschitz-Stetigkeit (1)

Tags: Stetigkeit, Lipschitz

Screenshot: (Stand 06.10.2024)


Entscheiden Sie, ob die nachfolgende Funktion f stetig oder Lipschitz-stetig ist oder, ob keine von beiden Eigenschaften auf f zutrifft.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(b) Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In Aufgabenteil (a) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft. In Aufgabenteil (b) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft. In Aufgabenteil (c) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft.

Vorkenntnisse: Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Randomisierung: keine

Anpassung: Die Funktion f kann in allen Aufgabenteilen angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.3.2.2 Lipschitz-Stetigkeit (2)

Tags Stetigkeit, Lipschitz

Screenshot (Stand 06.10.2024)

> Gegeben ist die stetige Funktion $f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = x^2 - 2\,x.$$
>
> Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. Geben Sie dazu eine Lipschitz-Konstante L mit
>
> $$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$
>
> für alle $x, y \in [-2, 3]$ an.
>
> Es ist $L =$ ___ .

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die stetige Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - cx$$

gegeben. Für f soll eine Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ gefunden werden, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$ gilt.

Vorkenntnisse Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Randomisierung Das Intervall $[a,b]$ und der Koeffizient c sind randomisierte, ganze Zahlen mit $a < b$.

Anpassung Die Funktion f kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja