
3 Grundlagen der Eindimensionalen Analysis

3.1 Grundbegriffe und Eigenschaften von Funktionen

Die Aufgaben in diesem Themenbereich behandeln grundlegende Begriffe zu und Eigenschaften von Funktionen, wie Injektivität, Surjektivität und Bijektivität am Beispiel elementarer reeller Funktionen.

Inhaltsverzeichnis

3.1.1 Bilder und Urbilder reeller Funktionen	131
3.1.1.1 Bild und Urbild einer quadratischen Funktion	131
3.1.1.2 Bilder reeller Funktionen	132
3.1.1.3 Urbilder reeller Funktionen	133
3.1.2 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität	134
3.1.2.1 Injektivität und Surjektivität (1)	134
3.1.2.2 Injektivität und Surjektivität (2)	135
3.1.3 Periodische Funktionen	136
3.1.3.1 Periodische Funktionen	136



Dieser Textauszug stammt aus „Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts ‚diAM:INT‘“ von Hakim Günther (WH), Tim Inoue (WH), Dr. Michael Kubocz (RWTH), Dr. Benjamin Schulz-Rosenberger (RUB) und Emma van der Smagt (RUB) und steht unter der Lizenz *Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International (CC BY-SA 4.0)*. Die Lizenzbedingungen können unter <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de> eingesehen werden.



3.1.1 Bilder und Urbilder reeller Funktionen

3.1.1.1 Bild und Urbild einer quadratischen Funktion

Tags

Quadratische Funktion, Bild, Urbild

Screenshot

(Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x^2 + 12x + 3.$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $f(U)$ der Menge $U = [-5, 2]$ unter f . Geben Sie Ihre Lösung als Intervall an. Beachten Sie die Schreibweise `cc(a,b)`, wenn es sich um das geschlossene Intervall $[a,b]$ und `oo(a,b)`, wenn es sich um das offene Intervall (a,b) handelt.

Es ist $f(U) =$

(b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(V)$ der Menge $V = (3, 66)$ unter f . Beachten Sie, dass Sie eine Schnittmenge von Intervallen `I` und `J` über `intersection(I,J)` und eine Vereinigung über `union(I,J)` eingeben, wobei `I` und `J` wie in Aufgabenteil (a) festgelegt sind.

Es ist $f^{-1}(V) =$

Autor

Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee

Tim Inoue

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe ist die quadratische Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Bild $f(U)$ eines abgeschlossenen Intervalls $U = [a, b]$ unter f bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll das Urbild $f^{-1}(V)$ eines offenen Intervalls $V = (c, d)$ unter f bestimmt werden.

Vorkenntnisse

Äquivalenzumformung, Bild und Urbild von Mengen unter einer Funktion

Randomisierung

Die Koeffizienten a_2, a_1 und a_0 sind randomisiert. Die Intervalle $[a, b]$ und (c, d) sind ebenfalls so randomisiert, dass die Lösungen $f(U)$ und $f^{-1}(V)$ ganzzahlige Intervallgrenzen besitzen.

Anpassungen

Die Funktion f kann um weitere Funktionen ergänzt werden, die Lösungsmenge muss entsprechend angepasst werden.

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

3.1.1.2 Bilder reeller Funktionen

Tags

Ungleichung, Bild

Screenshot

(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f(x) = 2x + 4, \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Mengen mit

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$. Geben Sie dazu eine die Elemente y von $f(A)$ beschreibende Bedingung in Form einer Ungleichung an. Geben Sie zum Beispiel eine Bedingung $2 < y \leq 4$ als $y > 2$ and $y \leq 4$ oder eine Bedingung $y < 2$ oder $y \geq 4$ als $y < 2$ or $y \geq 4$ ein.

Es ist $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{_____}\}$.

(b) Bestimmen Sie die Bildmenge $g(A)$.

Es ist $g(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{_____}\}$.

(c) Bestimmen Sie die Bildmenge $g(B)$.

Es ist $g(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{_____}\}$.

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe sind Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x + a, \quad g(x) = x^2 + b \quad (3.1.1)$$

und Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq s_1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq s_2\} \quad (3.1.2)$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Bild von A unter f bestimmt werden. In den Aufgabenteilen (b) und (c) sollen jeweils die Urbilder von A und B unter g bestimmt werden. Die Urbildmengen sollen mithilfe von Ungleichungen angegeben werden.

Vorkenntnisse

Äquivalenzumformung, Bild von Mengen unter Funktionen

Randomisierung

Die Konstante a und die Schranken s_1 und s_2 werden zufällig als ganze Zahlen mit $a \in \{2, 4\}$, $s_1, s_2 \in \{1, 2, 3\}$ gewählt. Die Konstante b ist gleich $s_1 - 1$.

Anpassungen

keine

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

3.1.1.3 Urbilder reeller Funktionen

Tags

Ungleichung, Urbild

Screenshot

(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f(x) = 2x + 2, \quad g(x) = x^2 + 3.$$

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Mengen mit

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}, \quad B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 19\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$. Geben Sie dazu eine die Elemente x von $f^{-1}(A)$ beschreibende Bedingung in Form einer Ungleichung an. Geben Sie zum Beispiel eine Bedingung $2 < x \leq 4$ als $x > 2$ and $x \leq 4$ oder eine Bedingung $x < 2$ oder $x \geq 4$ als $x < 2$ or $x \geq 4$ ein.

Es ist $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{[]}\}.$

(b) Bestimmen Sie die Urbildmengen $g^{-1}(A)$.

Es ist $g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{[]}\}.$

(c) Bestimmen Sie die Urbildmengen $g^{-1}(B)$.

Es ist $g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{[]}\}.$

Autor

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe sind Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2x + a, \quad g(x) = x^2 + b \quad (3.1.3)$$

und Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq s_1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq s_2\} \quad (3.1.4)$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Urbild von A unter f bestimmt werden. In den Aufgabenteilen (b) und (c) sollen jeweils die Bilder von A und B unter g bestimmt werden. Die Bildmengen sollen mithilfe von Ungleichungen angegeben werden.

Vorkenntnisse

Äquivalenzumformung, Urbild von Mengen unter Funktionen

Randomisierung

Die Konstante a und die Schranke s_1 werden als ganze Zahlen mit $a \in \{2, 4\}$ und $s_1 \in \{2, 4, 6\}$ gewählt. Die Schranke b ist gleich $s_1 - 1$ und die Schranke s_2 ist gleich $s_1^2 + b$.

Anpassungen

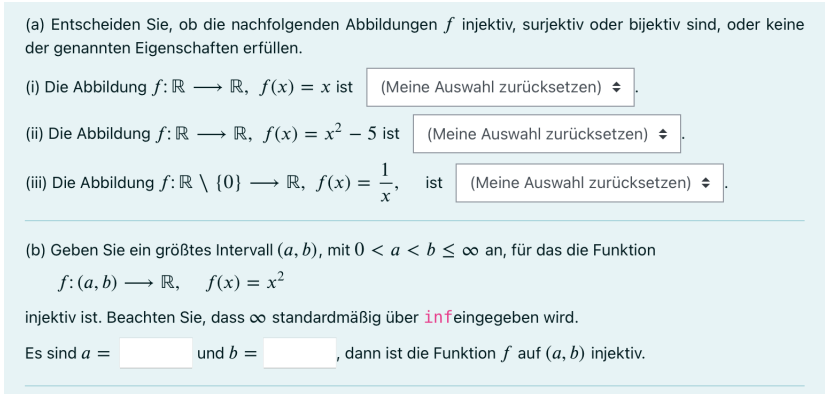
keine

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

3.1.2 Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

3.1.2.1 Injektivität und Surjektivität (1)

Tags	Injektiv, Surjektiv, Bijektiv, Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)  (a) Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Abbildungen f injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, oder keine der genannten Eigenschaften erfüllen. (i) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen) . (ii) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen) . (iii) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$, ist (Meine Auswahl zurücksetzen) . (b) Geben Sie ein größtes Intervall (a, b), mit $0 < a < b \leq \infty$ an, für das die Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ injektiv ist. Beachten Sie, dass ∞ standardmäßig über inf eingegeben wird. Es sind $a =$ und $b =$, dann ist die Funktion f auf (a, b) injektiv.
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In Aufgabenteil (a) (i) - (iii) sind Funktionen f dargestellt, bei denen entschieden werden soll, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, oder keine der genannten Eigenschaften erfüllen. In Aufgabenteil (b) ist die Funktion
	$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ gegeben. Es sollen Werte für a und b gefunden werden, sodass (a, b) das größte Intervall ist, auf dem f injektiv ist.
Vorkenntnisse	Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Äquivalenzumformungen, Funktionen
Randomisierung	keine
Anpassungen	Die Funktionen f in den Aufgabenteilen (a) (i) - (iii) können um weitere Funktionen ergänzt werden
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.1.2.2 Injektivität und Surjektivität (2)

Tags

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv, Umkehrfunktion

Screenshot

(Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die injektive Funktion f mit

$$f: [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ des Wertebereichs von f , sodass die Abbildung $f: [1, \infty) \longrightarrow W$ umkehrbar ist. Beachten Sie die Schreibweise $\text{cc}(a, b)$, wenn es sich um das geschlossene Intervall $[a, b]$ und $\text{oo}(a, b)$, wenn es sich um das offene Intervall (a, b) handelt. Die Schreibweise $\text{co}(a, b)$ bzw. $\text{oc}(a, b)$ bezeichnet analog halboffene Intervalle $[a, b)$ bzw. $(a, b]$.

Es ist $W =$.

(b) Geben Sie anschließend die Umkehrabbildung f^{-1} an, indem sie den konkreten Funktionsterm $f^{-1}(x)$ angeben.

Es ist $f^{-1}(x) =$.

Autor

Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee

Tim Inoue

Lizenz

CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe ist die injektive Funktion

$$f: [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ bestimmt werden, sodass die Funktion f umkehrbar ist. In Aufgabenteil (b) soll anschließend die Umkehrfunktion f^{-1} angegeben werden.

Vorkenntnisse

Äquivalenzumformung, Bild und Urbild von Mengen unter einer Funktion, Umkehrbarkeit von Funktionen

Randomisierung

keine

Anpassungen

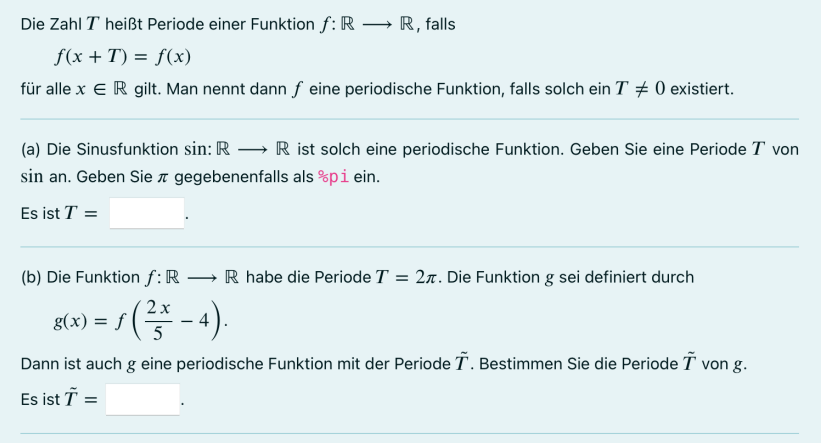
Die Funktion f kann angepasst werden, solange sie umkehrbar bleibt.

Sonderoption

Feedback unterdrücken: ja

3.1.3 Periodische Funktionen

3.1.3.1 Periodische Funktionen

Tags	Sinus, Periode, Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)  Die Zahl T heißt Periode einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, falls $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Man nennt dann f eine periodische Funktion, falls solch ein $T \neq 0$ existiert. (a) Die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist solch eine periodische Funktion. Geben Sie eine Periode T von $\sin$ an. Geben Sie π gegebenenfalls als %pi ein. Es ist $T =$. (b) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe die Periode $T = 2\pi$. Die Funktion g sei definiert durch $g(x) = f\left(\frac{2x}{5} - 4\right).$ Dann ist auch g eine periodische Funktion mit der Periode $\tilde{T}$. Bestimmen Sie die Periode $\tilde{T}$ von g. Es ist $\tilde{T} =$.
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird zunächst der Begriff der Periode T einer Funktion f erläutert. In Aufgabenteil (a) wird eine Periode der Sinusfunktion abgefragt. In Aufgabenteil (b) ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Periode $T = 2\pi$ gegeben. Ferner ist eine Funktion g durch $g(x) = f(ax - b)$ definiert. Dann ist g ebenfalls periodisch und es soll eine Periode $\tilde{T}$ von g bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Äquivalenzumformung, Periodische Funktionen
Randomisierung	Die Koeffizienten a und b sind so randomisiert, dass $\tilde{T}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π bleibt.
Anpassungen	Die Funktionen f und g können angepasst werden, solange sie periodisch bleiben.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja