2.3 Lagebeziehungen

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zur Lagebeziehung von Geraden und Ebenen. Zu Beginn werden die Parameter- und Normalendarstellung von Geraden und Ebenen behandelt. Im Verlauf des Themenbereich werden Spezialfälle wie die Lagebeziehung von (Halb-) Geraden und Halbebenen, sowie von Polygonen, orientierten Ebenen und orientierten Polygonen vertieft.

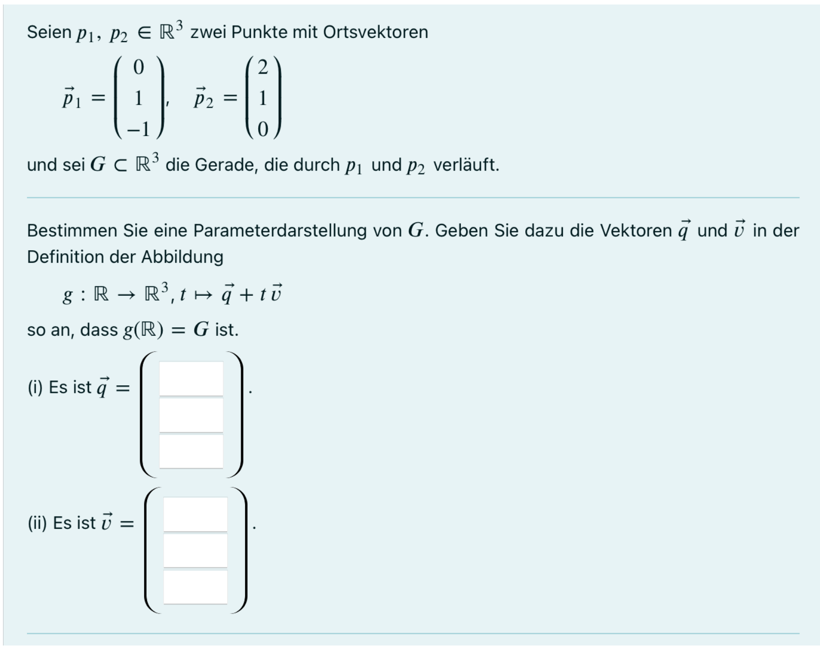
Inhaltsverzeichnis

2.3.1 Darstellungen von Geraden und Ebenen

2.3.1.1 Parameterdarstellung von Geraden

Tags: Parameterdarstellung, Gerade

Screenshot: (Stand 07.10.2024)



Seien $p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $G \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade, die durch p_1 und p_2 verläuft.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von G. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{v}$ in der Definition der Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{q} + t\,\vec{v}$$

so an, dass $g(\mathbb{R}) = G$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} =$

(ii) Es ist $\vec{v} =$

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Parameterdarstellung einer Gerade in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und ein Spannvektor der Gerade angegeben werden.

Vorkenntnisse: Bestimmung eines Spannvektors (Verschiebungsvektor)

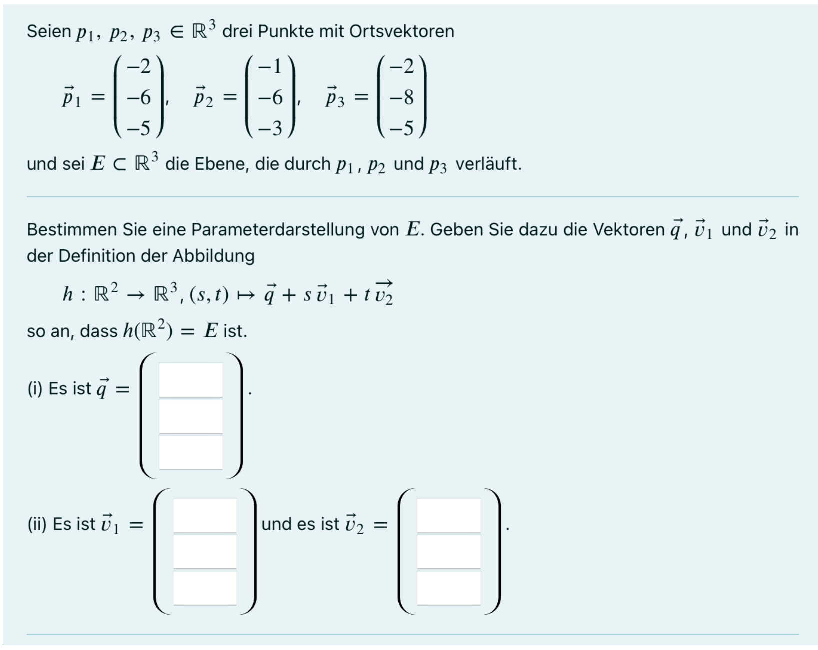
Randomisierung: Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Gerade werden zufällig gewählt.

Anpassung: Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Gerade können beliebig angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.2 Parameterdarstellung von Ebenen

Tags	Parameterdarstellung, Gerade
Screenshot	(Stand 07.10.2024)



Seien $p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch p_1, p_2 und p_3 verläuft.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in der Definition der Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto \vec{q} + s\,\vec{v}_1 + t\,\vec{v_2}$$

so an, dass $h(\mathbb{R}^2) = E$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} =$.

(ii) Es ist $\vec{v}_1 =$ und es ist $\vec{v}_2 =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und zwei Spannvektoren der Ebene angegeben werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung von Spannvektoren (Verschiebungsvektoren)
Randomisierung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.3 Normalendarstellung von Ebenen

Tags	Normalendarstellung, Ebene
Screenshot	(Stand 07.10.2024)

Seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch p_1, p_2 und p_3 verläuft.

Bestimmen Sie eine Normalendarstellung von E. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{n}$ in der Definition der Menge

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0\}$$

so an, dass $M = E$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Normalendarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und ein Normalenvektor der Ebene angegeben werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung von Spannvektoren, Bestimmung von Normalenvektoren (z.B. Kreuzprodukt)
Randomisierung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.4 Normalendarstellung von Geraden

Tags	Normalendarstellung, Gerade
Screenshot	(Stand 07.10.2024)

> Seien $p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit Ortsvektoren
>
> $$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$
>
> und sei $G \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade, die durch p_1 und p_2 verläuft.
>
> Bestimmen Sie eine Normalendarstellung von G. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$, $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ in der Definition der Menge
>
> $$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_1 = 0 = (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_2\}$$
>
> so an, dass $M = E$ ist.
>
> (i) Es ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.
>
> (ii) Es ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ und es ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Normalendarstellung einer Gerade in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und zwei Normalenvektoren der Gerade angegeben werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung von Normalenvektoren
Randomisierung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Geraden werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Geraden können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2 Geraden und Ebenen

2.3.2.1 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (1)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

mit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit linear unabhängigen Vektoren $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in \mathbb{R}^3$. Im Folgenden bezeichne $\vec{n}$ das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Aussage zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und E.

Wenn (Meine Auswahl zurücksetzen) sind, dann schneidet die Gerade G die Ebene E (Meine Auswahl zurücksetzen).

(b) Vervollständigen Sie jede der drei folgenden Aussagen zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und E.

(i) Wenn die Gerade G die Ebene E in genau einem Punkt schneidet, dann sind (Meine Auswahl zurücksetzen).

(ii) Wenn die Gerade G die Ebene E in unendlich vielen Punkten schneidet, dann sind (Meine Auswahl zurücksetzen).

(iii) Wenn die Gerade G die Ebene E gar nicht schneidet, dann sind (Meine Auswahl zurücksetzen).

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen Kriterien für die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen erarbeitet werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen ergänzt werden, indem sowohl geeignete Kriterien an die Stütz- und Normalvektoren der Geraden und der Ebene als auch die Lagebeziehung selbst ausgewählt werden. In Aufgabenteil (b) sollen drei Lückentexte zu jeweils einer Lagebeziehung von Geraden und Ebenen zu einer wahren Aussage ergänzt werden, indem erneut geeignete Kriterien an die Stütz- und Normalvektoren der Geraden ausgewählt werden.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Normalendarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Randomisierung	Die Reihenfolge der vorgegebenen Antworten ist zufällig gewählt.

Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.2 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (2)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $t,\ s_1\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie $t,\ s_1$ und s_2 exakt an.

(i) Es ist $t =$ ___ .

(ii) Es ist $s_1 =$ ___ und es ist $s_2 =$ ___ .

(b) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ des eindeutigen Schnittpunkts r von G und E und geben Sie die Komponenten von $\vec{r}$ an.

Es ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}.$

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene bestimmt werden. Sowohl die Gerade als auch die Ebene sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Parameter des Schnittpunktes in der Parameterdarstellung sowohl der Geraden als auch der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll der Ortsvektor des Schnittpunkts der Geraden mit der Ebene bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Randomisierung	Die Komponenten der Orts- und Spannvektoren der Geraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig so gewählt, dass sowohl die Parameter als auch die Komponenten des Ortvektors des Schnittpunkts ganzzahlig sind.
Anpassung	Der Ortsvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.3 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (3) (Halbgeraden)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Halbgerade, Ebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$G_+ = \{g(t) \mid t > 0\}$$

definiert eine Halbgerade in G.

(a) Bestimmen Sie die reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit $g(t) \in E$ und geben Sie t exakt an.

(i) Es ist $t =$ ______ .

(b) Sei $r = g(t)$ der Schnittpunkt von G und E für t aus Aufgabenteil (a). Entscheiden Sie mithilfe von t, ob r ein Element der Halbgeraden G_+ ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Der Punkt r ist [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] Element von G_+.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Schnittpunkt einer Halbgeraden mit einer Ebene bestimmt werden. Sowohl die Halbgerade als auch die Ebene sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Parameter des Schnittpunktes in der Parameterdarstellung der Halbgeraden bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Halbgeraden und der Ebene ergänzt werden.
Vorkenntnisse	Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Definition von Halbgeraden
Randomisierung	Die Komponenten der Orts- und Spannvektoren der Halbgeraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig so gewählt, dass der Parameter des Schnittpunkts in der Parameterdarstellung der Halbgeraden ganzzahlig ist.

Anpassung	Der Ortsvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.4 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (4) (Halbebenen)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Halbebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2.$$

Die Menge

$$H = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \leq s_2\}$$

definiert eine Halbebene in E. Im Folgenden seien

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie einen Ortsvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ an, sodass die Gerade G die Halbebene H schneidet und die Gerade G die Halbebene $E \setminus H$ nicht schneidet.

(i) Es ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie einen Ortsvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ an, sodass die Gerade G die Halbebene H und die Halbebene $E \setminus H$ schneidet.

(i) Es ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen Stütz- und Spannvektoren von zwei Geraden angegeben werden, die bestimmte Lagebeziehungen mit einer gegebenen Halbebene und ihrer komplementären Halbebene aufweisen. In Aufgabenteil (a) soll eine Gerade definiert werden, die die Halbebene schneidet, aber die komplementäre Halbebene nicht schneidet. In Aufgabenteil (b) soll eine Gerade definiert werden, die sowohl die Halbebene als auch die komplementäre Halbebene schneidet.
Vorkenntnisse	Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Definition von Halbebenen
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der (Halb-) Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der (Halb-) Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.5 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (5) (Orientierung)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Orientierung
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Sei G eine von dem Vektor $\vec{v}$ aufgespannte Gerade und sei E eine von den Vektoren $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ aufgespannte Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

▶ Vorder- und Rückseiten von Ebenen

(a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und das Standardskalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ von $\vec{n}$ und $\vec{v}$.

(i) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} \cdot \vec{v} = \square$.

(b) Vervollständigen Sie (mithilfe von Aufgabenteil (a)) die folgenden Aussagen zu im Allgemeinen wahren Aussagen über die Lagebeziehung von G und E.

(i) Die von $\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

(ii) Die von $-\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_2 + \vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

(iii) Die von $\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2 + \vec{w}_1)$.

(c) Geben Sie einen Vektor $\vec{w}$ an, sodass eine von $\vec{w}$ aufgespannte Gerade weder Vorder- noch Rückseite der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ schneidet.

Es ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung einer Geraden und der durch die Orientierung der Spannvektoren definierten Vorder- und Rückseite einer Ebene untersucht werden. Die Gerade und die Ebene sind durch ihre Spannvektoren definiert. In Aufgabenteil (a) sollen der Normalenvektor der Ebene als das Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene berechnet werden. Weiterhin soll das Standardskalarprodukt des Normalenvektors der Ebene und des Spannvektors der Geraden berechnet werden. In Aufgabenteil (b) sollen drei Lückentexte zu wahren Aussagen über die Lagebeziehung der Geraden und Vorder- und Rückseite der Ebene ergänzt werden. Die Lagebeziehung unterscheidet sich durch die Wahl jeweils anderer Spannvektoren sowohl für die Gerade als auch für die Ebene. In Aufgabenteil (c) soll der Spannvektor einer Geraden angegeben werden, der weder die Vorder- noch die Rückseite der Ebene schneidet.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Randomisierung	Die Komponenten der Spannvektoren der Geraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.3 Punkte und Polygone

2.3.3.1 Lagebeziehung von Punkten und Polygonen (1) (Parallelogramme)

Tags Lagebeziehung, Punkt, Ebene, Polygon, Parallelogramm

Screenshot (Stand 08.10.2024)

Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$P = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1 \le 1,\ 0 \le s_2 \le 1\}$$

definiert ein Parallelogramm in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $p = h(s_1, s_2)$ und geben Sie s_1 und s_2 in (i) exakt an. Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob der Punkt p Element von P ist. Vervollständigen Sie dazu den Lückentext in (ii).

(i) Es ist $s_1 =$ ____ und es ist $s_2 =$ ____ .

(ii) Der Punkt p ist (Meine Auswahl zurücksetzen) Element von P.

(b) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes $r \in E$ an, der kein Element von P ist.

Es ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung von Punkten und einem Parallelogramm bestimmt werden. Die Ebene, in der das Parallelogramm liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist ein Punkt in der Ebene gegeben. Es sollen die Parameter des Punktes in der Parameterdarstellung der Ebene angegeben werden. Weiterhin soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung des gegebene Punktes und des Parallelogramms ergänzt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Punkt angegeben werden, der in dem Parallelogramm liegt.

Vorkenntnisse Parameterdarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Punkten und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

Randomisierung Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.

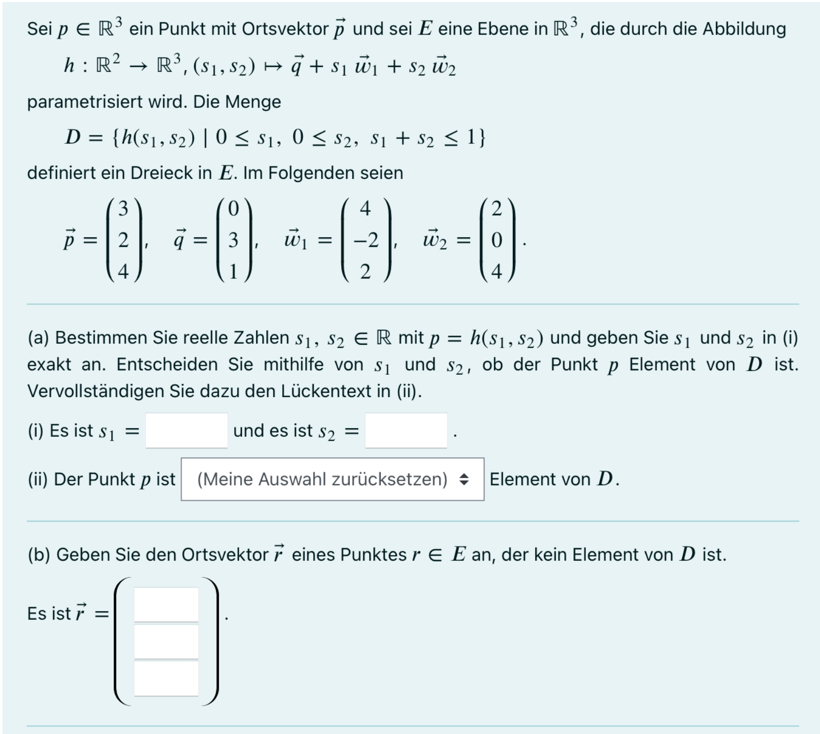
Anpassung Der OrtsvStützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

2.3.3.2 Lagebeziehung von Punkten und Polygonen (2) (Dreieck)

Tags Lagebeziehung, Punkt, Ebene, Polygon, Dreieck

Screenshot (Stand 08.10.2024)



Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$

definiert ein Dreieck in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $p = h(s_1, s_2)$ und geben Sie s_1 und s_2 in (i) exakt an. Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob der Punkt p Element von D ist. Vervollständigen Sie dazu den Lückentext in (ii).

(i) Es ist $s_1 =$ ____ und es ist $s_2 =$ ____ .

(ii) Der Punkt p ist (Meine Auswahl zurücksetzen) Element von D.

(b) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes $r \in E$ an, der kein Element von D ist.

Es ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung von Punkten und einem Dreieck bestimmt werden. Die Ebene, in der das Dreick liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist ein Punkt in der Ebene gegeben. Es sollen die Parameter des Punktes in der Parameterdarstellung der Ebene angegeben werden. Weiterhin soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung des gegebene Punktes und des Dreiecks ergänzt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Punkt angegeben werden, der in dem Dreieck liegt.

Vorkenntnisse Parameterdarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Punkten und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

Randomisierung Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.

Anpassung Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

2.3.4 Geraden und Polygone

2.3.4.1 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (1) (Parallelogramme)

Tags Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Parallelogramm

Screenshot (Stand 08.10.2024)

Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$P = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1 \le 1,\ 0 \le s_2 \le 1\}$$

definiert ein Parallelogramm in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$, sodass die durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

parametrisierte Gerade G das Parallelogramm P in seinem Mittelpunkt m schneidet.

(a) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{m}$ von m an.

Es ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$ an.

Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll der Spannvektor einer Geraden, so gewählt werden, dass die Gerade ein gegebenes Parallelogramm in seinem Mittelpunkt schneidet. Die Ebene, in der das Parallelogramm liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist der Mittelpunkt des Parallelogramms zu bestimmen. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe des Stützvektors der Geraden und dem Mittelpunkt des Parallelogramms ein Spannvektor der Geraden bestimmt werden.

Vorkenntnisse Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

Randomisierung Die Komponenten des Stützvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade nicht in der Ebene verlaufen kann.

Anpassung Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.2 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (2) (Dreiecke)

Tags: Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Dreieck

Screenshot: (Stand 08.10.2024)

> Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch
>
> $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$
>
> und die Ebene E werde parametrisiert durch
>
> $$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$
>
> mit
>
> $$\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
>
> Die Menge
>
> $$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$
>
> definiert ein Dreieck in E.
>
> ---
>
> (a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $t,\ s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie t in (i) und s_1 und s_2 in (ii) exakt an.
>
> (i) Es ist $t =$ [ ] .
>
> (ii) Es ist $s_1 =$ [ ] und es ist $s_2 =$ [ ] .
>
> ---
>
> (b) Sei $r = g(t) = h(s_1, s_2)$ der Schnittpunkt von G und E für t, s_1 und s_2 aus Aufgabenteil (a). Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob r ein Element von D ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.
>
> Der Punkt r ist [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] Element von D.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Geraden und eines Dreiecks untersucht werden. Die Gerade und die Ebene, in der das Dreieck liegt, sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Parameter des Schnittpunkts der Geraden und der Ebene in den Parameterdarstellungen der Geraden und der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Geraden und des Dreiecks ergänzt werden.

Vorkenntnisse: Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

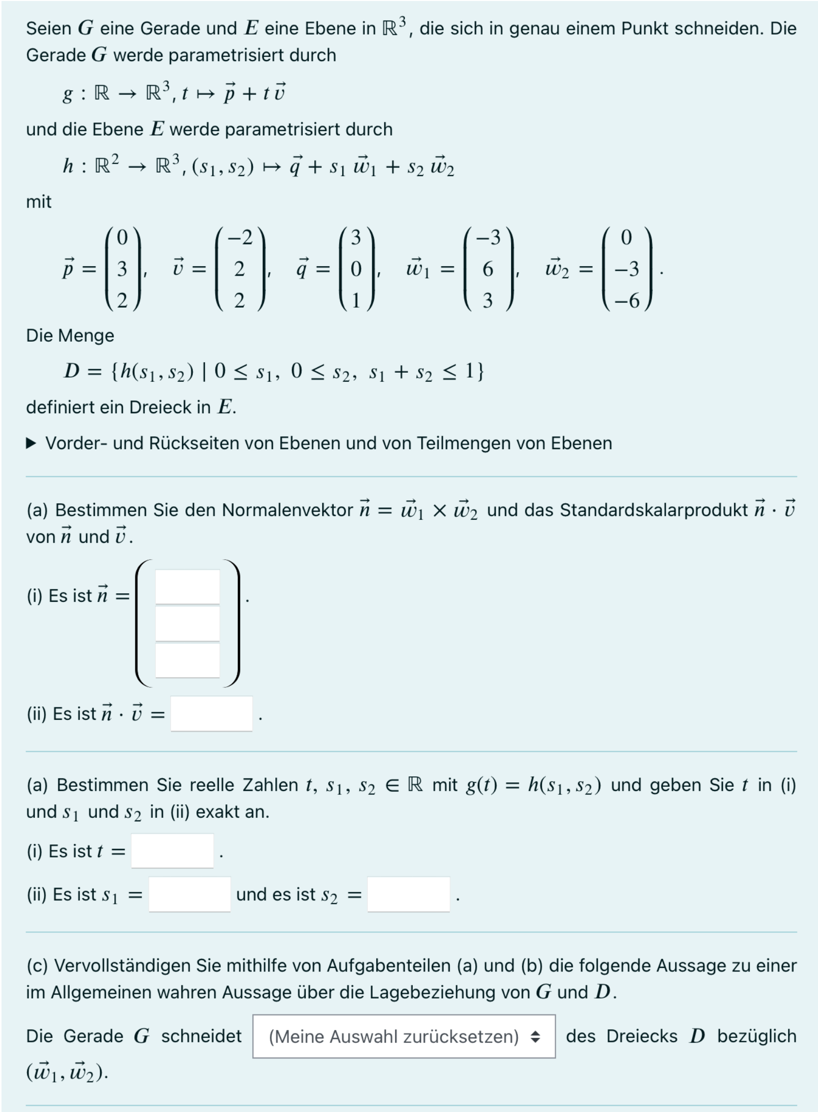
Randomisierung: Die Komponenten des Stützvektors und des Spannvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade die Ebene in genau einem Punkt schneidet.

Anpassung: Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.3 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (3) (Orientierte Dreiecke)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Dreieck, Orientierung
Screenshot	(Stand 08.10.2024)



Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \leq s_1,\ 0 \leq s_2,\ s_1 + s_2 \leq 1\}$$

definiert ein Dreieck in E.

▶ Vorder- und Rückseiten von Ebenen und von Teilmengen von Ebenen

(a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und das Standardskalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ von $\vec{n}$ und $\vec{v}$.

(i) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} \cdot \vec{v} =$ ____ .

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen t, s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie t in (i) und s_1 und s_2 in (ii) exakt an.

(i) Es ist $t =$ ____ .

(ii) Es ist $s_1 =$ ____ und es ist $s_2 =$ ____ .

(c) Vervollständigen Sie mithilfe von Aufgabenteilen (a) und (b) die folgende Aussage zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und D.

Die Gerade G schneidet [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] des Dreiecks D bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Geraden und der Vorder- und Rückseite eines Dreiecks untersucht werden. Die Gerade und die Ebene, in der das Dreieck liegt, sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) soll ein Normalenvektor der Ebene als Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene bestimmt werden. Weiterhin soll das Standardskalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Spannvektor der Geraden bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Parameter des Schnittpunkts der Geraden und der Ebene in den Parameterdarstellungen der Geraden und der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Geraden und der Vorder- und Rückseite des Dreiecks ergänzt werden.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und des Spannvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade die Ebene in genau einem Punkt schneidet.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.4 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (4) (Sichtbare Dreiecke)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Halbgerade, Ebene, Polygon, Dreieck, Orientierung
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Betrachten Sie die Halbgerade

$$G_+ = \{\vec{p} + t\,\vec{v} \mid t > 0\}.$$

und die Dreiecke

$$D_i = \{\vec{q}_i + s_1\,\vec{w}_{i1} + s_2\,\vec{w}_{i2} \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$

für $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Sei $\vec{q}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes und seien $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ linear unabhängige Vektoren, dann seien $\vec{p} = \vec{q} + \vec{n}$ und $\vec{v} = -\vec{n}$ mit $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und

(1)	$\vec{q}_1 = \vec{q},$	$\vec{w}_{11} = \vec{w}_1,$	$\vec{w}_{12} = \vec{w}_2,$
(2)	$\vec{q}_2 = \vec{q} - \vec{w}_2,$	$\vec{w}_{21} = \vec{w}_1,$	$\vec{w}_{22} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1,$
(3)	$\vec{q}_3 = \vec{q} - \vec{n},$	$\vec{w}_{31} = \vec{w}_2,$	$\vec{w}_{32} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1,$
(4)	$\vec{q}_4 = \vec{w}_1 + \vec{q},$	$\vec{w}_{41} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1,$	$\vec{w}_{42} = -\vec{w}_1,$
(5)	$\vec{q}_5 = \vec{w}_1 + \vec{q},$	$\vec{w}_{51} = \vec{w}_2,$	$\vec{w}_{52} = -\vec{w}_1,$
(6)	$\vec{q}_6 = \vec{q},$	$\vec{w}_{61} = \vec{w}_2,$	$\vec{w}_{62} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1.$

▶ Sichtbare Dreiecke

Genau eine der folgenden Aussagen über die Sichtbarkeit der Dreiecke D_1, D_2, ..., D_6 bezüglich G_+ ist im Allgemeinen wahr. Bestimmen Sie, welches der genannten Dreiecke sichtbar oder nicht sichtbar bezüglich G_+ ist und markieren Sie die zugehörige im Allgemeinen wahre Aussage.

- (Meine Auswahl zurücksetzen)

- (1) Das Dreieck D_1 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (2) Das Dreieck D_2 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (3) Das Dreieck D_3 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (4) Das Dreieck D_4 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (5) Das Dreieck D_5 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (6) Das Dreieck D_6 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Halbgeraden und sechs Dreiecken untersucht werden. Es soll genau das Dreieck identifiziert werden, das bezüglich der Halbgeraden nicht sichtbar ist.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Reihenfolge der Dreiecke ist randomisiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja