2 Grundlagen der Linearen Algebra

2.1 Rechnen mit Vektoren

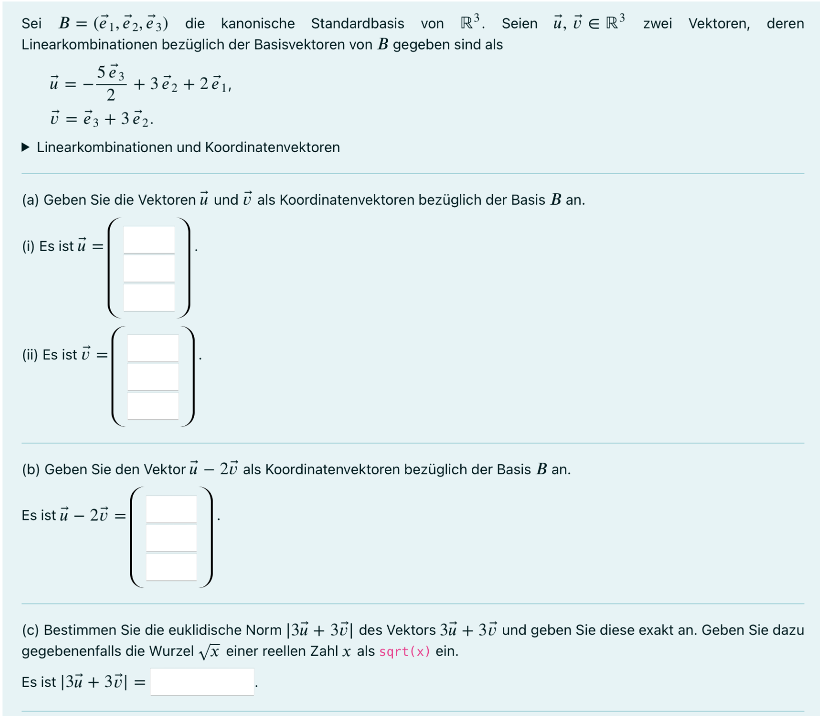
Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu grundlegenden Eigenschaften und Darstellungsformen von Vektoren und zu elementaren Vektoroperationen. Weiterhin behandeln die Aufgaben Anwendungen aus der Physik, wie die Darstellung von Bewegungsrichtungen bei Stoßprozessen und die Darstellung von Kräften in Halteseilen.

Inhaltsverzeichnis

2.1.1 Linearkombination und Basisdarstellung

2.1.1.1 Elementare Vektoroperationen (1)

Tags	Koordinatenvektor, Vektorrechnung, Norm, Betrag
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Sei $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ die kanonische Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren, deren Linearkombinationen bezüglich der Basisvektoren von B gegeben sind als

$$\vec{u} = -\frac{5\,\vec{e}_3}{2} + 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_1,$$
$$\vec{v} = \vec{e}_3 + 3\,\vec{e}_2.$$

▶ Linearkombinationen und Koordinatenvektoren

(a) Geben Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B an.

(i) Es ist $\vec{u} =$.

(ii) Es ist $\vec{v} =$.

(b) Geben Sie den Vektor $\vec{u} - 2\vec{v}$ als Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B an.

Es ist $\vec{u} - 2\vec{v} =$.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Norm $|3\vec{u} + 3\vec{v}|$ des Vektors $3\vec{u} + 3\vec{v}$ und geben Sie diese exakt an. Geben Sie dazu gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl x als `sqrt(x)` ein.

Es ist $|3\vec{u} + 3\vec{v}| =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind als Linearkombination der kanonischen Standardbasis B von $\mathbb{R}^3$ gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Koordinatenvektoren von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezüglich B berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Koordinatenvektor einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet werden. In Aufgabenteil (c) soll der Betrag einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet werden.
Vorkenntnisse	Koordinatenvektoren, Addition / Subtraktion von Vektoren, Betrag von Vektoren
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig als ganze Zahlen gewählt, sodass die Komponenten des Koordinatenvektors in Aufgabenteil (c) und dessen Betrag ein Pythagoreisches Quadrupel bilden.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.1.2 Vektoren als Verschiebung

Tags Vektoren, Translation, Verschiebung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Jeder Vektor $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^2$ definiert eine Verschiebung (Translation)

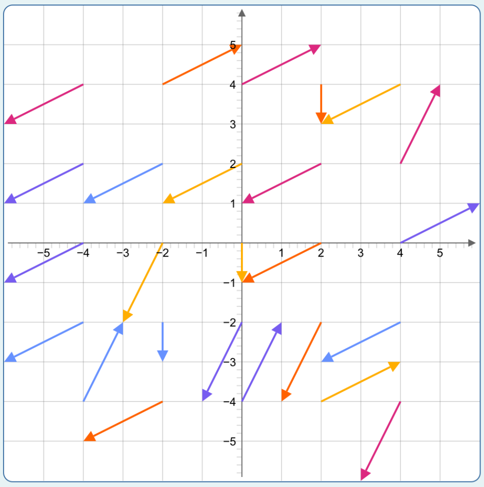
$$T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; P \mapsto Q,$$

die jeden Punkt P auf den eindeutigen Punkt Q mit

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

abbildet. Der Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Pfeil darstellen, der in einem beliebigen Punkt P beginnt und mit der Pfeilspitze im zugehörigen Punkt $Q = T_{\vec{v}}(P)$ endet.

Die folgende Abbildung stellt voneinander verschiedene Vektoren jeweils durch mehrere Pfeile im oben beschriebenen Sinne dar. Sie können die Pfeile zur bessern Übersicht durch Klicken und Halten verschieben.



(a) Geben Sie die Anzahl a der Pfeile an, die den Vektor $(-2, -1)$ darstellen.

Es ist $a =$.

(b) Geben Sie die Anzahl b der Pfeile an, die die Verschiebung darstellen, die $(-1, 1)$ auf $(1, 2)$ abbildet.

Es ist $b =$.

(c) Geben Sie die Anzahl c der Vektoren an, die die Verschiebung definieren, die $(0, 0)$ auf $(1, 2)$ abbildet.

Es ist $c =$.

(d) Geben Sie die Anzahl d der in der Abbildung dargestellten und voneinander verschiedenen Vektoren an.

Es ist $d =$.

Autoren Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe werden Vektoren in $\mathbb{R}^2$ mit der durch sie eindeutig bestimmten Translation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identifiziert und durch Vektorpfeile mit beliebigen Fußpunkten dargestellt. Eine Abbildung zeigt verschiedene Pfeile. In Aufgabenteil (a) soll die Anzahl aller Pfeile angegeben werden, die einen gegebenen Vektor repräsentieren. In Aufgabenteil (b) soll die Anzahl aller Pfeile angegeben werden, die eine gegebene Translation repräsentieren. In Aufgabenteil (c) soll die Anzahl aller Vektoren angegeben werden, die eine gegebene Translation definieren. In Aufgabenteil (d) soll die Anzahl aller durch Pfeile in der Abbildung repräsentierter und voneinander unterschiedlicher Vektoren angegeben werden.

Vorkenntnisse	Unterscheidung und Umgang verschiedener Darstellungsformen von Vektoren, Kenntnis von Verschiebungen oder Translationen
Randomisierung	Die Pfeile in der Abbildung und die in den Aufgabenteilen angegebenen Vektoren und Translationen werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.1.1.3 Bergsteigerin (1/2)

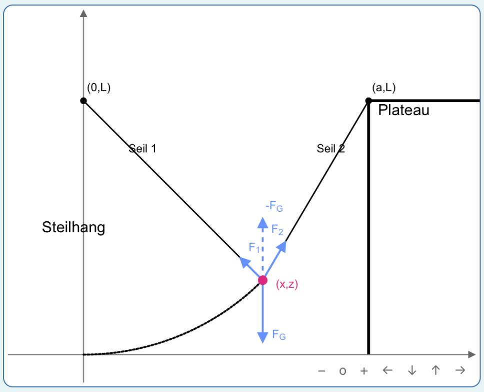
Tags: Vektorrechnung, Kräftegleichgewicht, Pythagoras, Trigonometrie

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt.

Berechnen Sie die Kraft $F_2(x)$, mit welcher eine Person auf dem Plateau die Bergsteigerin im Punkt (x,z) halten muss, wobei die Körpergröße der Person auf dem Plateau vernachlässigt wird. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung stellt die in den Seilen 1 und 2 hängende Bergsteigerin dar. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass sich der Fuß des Steilhangs am Punkt $(0,0)$ und der Befestigungspunkt von Seil 1 am Punkt $(0,L)$ in der (x,z)-Ebene eines zweidimensionalen Koordinatensystems befindet. Der Befestigungspunkt von Seil 2 am Plateau befindet sich dann am Punkt (a,L).



(a) Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Länge L von Seil 1 und der Position der Bergsteigerin her. Geben Sie dazu L^2 in Abhängigkeit der Komponenten x und z an.

Es ist $L^2 =$ ____.

(b) Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Länge L von Seil 1 und der Position der Bergsteigerin her. Geben Sie dazu L^2 in Abhängigkeit der Komponenten x und z an.

Es ist $L^2 =$ ____.

(b) Die Bergsteigerin befindet sich im Kräftegleichgewicht. Die Gleichung, die das Kräftegleichgewicht beschreibt ist

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + |\vec{F}_G| = 0.$$

Vervollständigen Sie die folgenden Gleichungen so, dass diese das Kräftegleichgewicht in der x- und der z-Richtung beschreiben. Wählen Sie dazu die geeigneten Vorzeichen aus. Leere Eingaben werden als falsch bewertet.

Es gilt

in x-Richtung (I) ☐ $F_{1,x}$ ☐ $F_{2,x}$ ☐ $|F_G| = 0,$

in z-Richtung (II) ☐ $F_{1,z}$ ☐ $F_{2,z}$ ☐ $|F_G| = 0.$

(c) Berechnen Sie die x- und z-Komponenten der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit der x-Komponente der Position (x,z), der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau, sowie den Beträgen $|\vec{F}_1|$ und $|\vec{F}_2|$. Setzen Sie zur Vereinfachung für die Beträge $|\vec{F}_1| = F_1$ und $|\vec{F}_2| = F_2$ und geben Sie diese als F_1 und F_2 ein.

(i) Die x-Komponente von $\vec{F}_1$ ist $F_{1,x}(x) =$ ____.

(ii) Die x-Komponente von $\vec{F}_2$ ist $F_{2,x}(x) =$ ____.

(iii) Die z-Komponente von $\vec{F}_1$ ist $F_{1,z}(x) =$ ____.

(iv) Die z-Komponente von $\vec{F}_2$ ist $F_{2,z}(x) =$ ____.

(d) Bestimmen Sie aus den Gleichungen (I) und (II) aus Aufgabenteil (a) die Kraft $F_2(x)$, mit der die Bergsteigerin vom Plateau aus im Punkt (x,z) gehalten werden muss. Die Kraft $F_2(x)$ hängt von der x-Komponente der Position (x,z), der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau und der Gewichtskraft F_G ab.

Es ist $F_2(x) =$ ____.

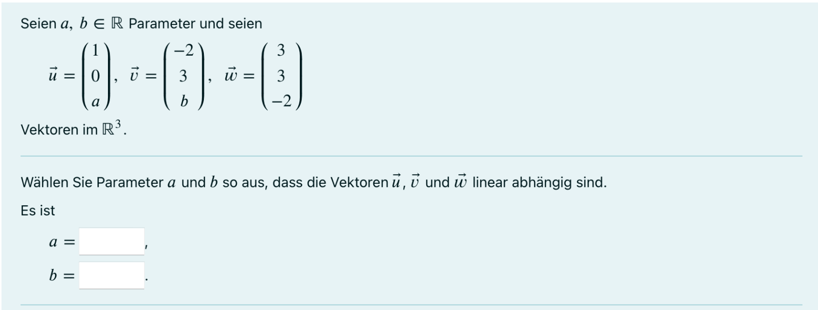
Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Thema	An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt. In dieser Aufgabe sollen die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$ berechnet werden, die entlang von Seil 1 beziehungsweise Seil 2 auf die Bergsteigerin an Punkt (x, z) wirken. In Aufgabenteil (a) soll dazu L^2 in Abhängigkeit von (x, z) bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll das Gleichgewicht der Kräfte $\vec{F}_1(x)$, $\vec{F}_2(x)$ und der auf die Bergsteigerin wirkenden Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in x- und z-Richtung durch Angabe der Vorzeichen der einzelnen Summanden angegeben werden. In Aufgabenteil (c) sollen die x- und y-Komponenten der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit von (x, z) und den Beträgen $\|\vec{F}_1\|$ und $\|\vec{F}_2\|$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (d) soll mithilfe der Aufgabenteil (b) und (c) schließlich die Kraft $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit von (x, y), L, a und $\|\vec{F}_G\|$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kräftegleichgewicht mit Vektorrechnung, Satz von Pythagoras, Betrag eines Vektors
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge : 0 Feedback unterdrücken : ja

2.1.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit

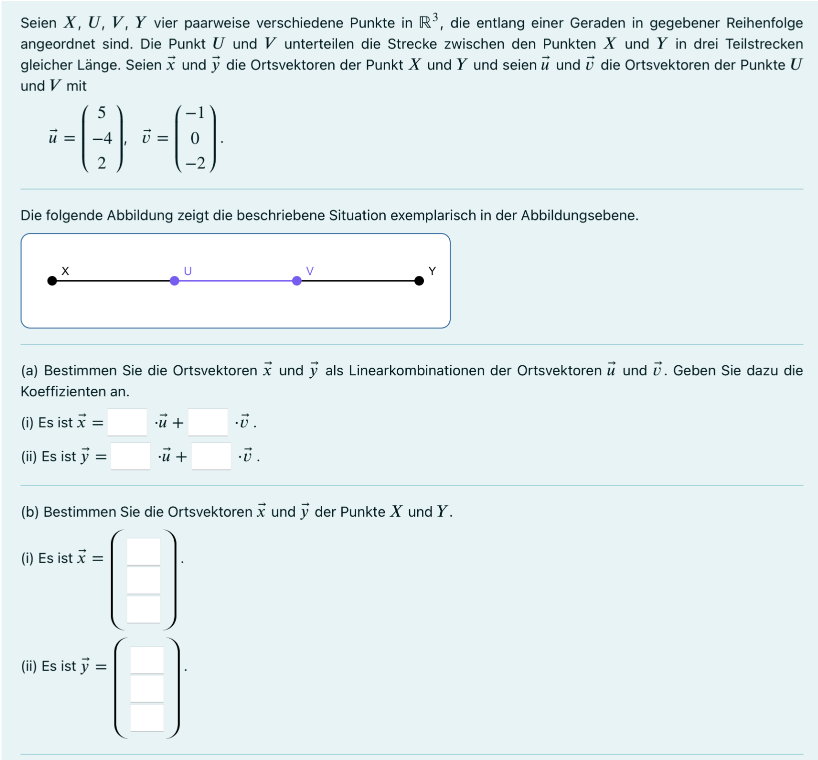
2.1.2.1 Lineare Abhängigkeit (1)

Tags	Lineare Abhängigkeit, Vektorrechnung, Gleichungssystem, Determinante
Screenshot	(Stand 29.07.2024) 

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind von unbestimmten Parametern a und b abhängig. Es sollen exemplarisch Werte für a und b angegeben werden, sodass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.
Vorkenntnisse	Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Lineare Gleichungssysteme, Determinante
Randomisierung	Die bestimmten Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.2.2 Lineare Abhängigkeit (2)

Tags	Lineare Abhängigkeit, Linearkombination
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Seien X, U, V, Y vier paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^3$, die entlang einer Geraden in gegebener Reihenfolge angeordnet sind. Die Punkt U und V unterteilen die Strecke zwischen den Punkten X und Y in drei Teilstrecken gleicher Länge. Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die Ortsvektoren der Punkt X und Y und seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Ortsvektoren der Punkte U und V mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation exemplarisch in der Abbildungsebene.

(a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als Linearkombinationen der Ortsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Geben Sie dazu die Koeffizienten an.

(i) Es ist $\vec{x} = \square \cdot \vec{u} + \square \cdot \vec{v}$.

(ii) Es ist $\vec{y} = \square \cdot \vec{u} + \square \cdot \vec{v}$.

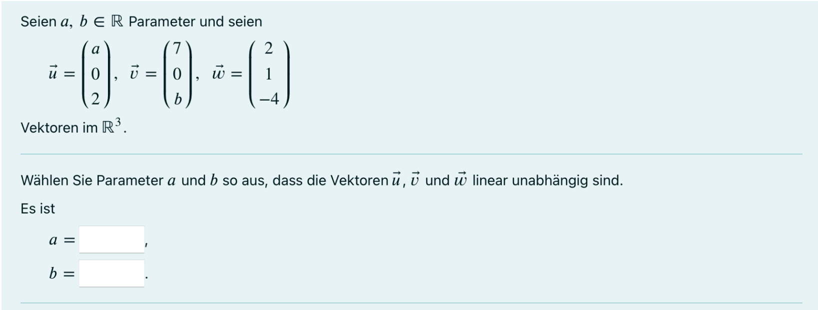
(b) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ der Punkte X und Y.

(i) Es ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Entlang einer Geraden sind die vier paarweise verschiedenen Punkt X, U, V und Y in dieser Reihenfolge äquidistant angeordnet. Die Ortsvektoren der Punkt U und V sind explizit angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen Koeffizienten angegeben werden, sodass sich die Ortsvektoren von X und Y als Linearkominationen der Ortsvektoren von U und V darstellen lassen. In Aufgabenteil (b) sollen die Koordinaten der Ortsvektoren von X und Y berechnet werden.
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.2.3 Lineare Unbhängigkeit

Tags	Lineare Abhängigkeit, Vektorrechnung, Gleichungssystem, Determinante
Screenshot	(Stand 29.07.2024) 
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind von unbestimmten Parametern a und b abhängig. Es sollen exemplarisch Werte für a und b angegeben werden, sodass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.
Vorkenntnisse	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren, Lineare Gleichungssysteme, Determinante
Randomisierung	Die bestimmten Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt, sodass mindestens ein Paar von Parametern a und b existieren, sodass $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können unter der Bedingung, dass $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.3 Länge und Abstand

2.1.3.1 Gleichschenkliges Dreieck

Tags: gleichschenkliges Dreieck, Vektorrechnung, Vektorbetrag

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten $A(4,2)$, $B(0,-4)$ und $C(-4,2)$. Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Berechnen Sie die Längen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ der Seiten von ΔABC und geben Sie diese exakt an. Geben Sie gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer Zahl x als `sqrt(x)` ein.

(i) Es ist $\overline{AB} =$

(ii) Es ist $\overline{AC} =$

(iii) Es ist $\overline{BC} =$

(b) Begründen Sie mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (a) berechneten Längen der Strecken, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist. Wählen Sie dazu eine geeignete Begründung aus den folgenden Aussagen aus.

- Alle drei Seiten sind gleich lang.
- Zwei Seiten sind gleich lang und die dritte Seite ist kürzer.
- Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.
- Zwei Seiten sind gleich lang und die dritte Seite ist länger.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Jörg Härterich Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Es sind drei Punkte A, B und C in $\mathbb{R}^2$ gegeben. In dieser Aufgabe wird gezeigt oder widerlegt, dass das durch die Punkt A, B und C definierte Dreieck gleichschenkelig ist. In Aufgabenteil (a) werden dazu die Längen der Seiten des Dreiecks berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird eine vorformulierte Begründung als Antwort ausgewählt.
Vorkenntnisse	Richtungsvektor, Betrag eines Vektors
Randomisierung	Die Komponenten der Ortsvektoren der Punkte A, B und C werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 ausgewählt, sodass die Punkte A, B und C ein Dreieck definieren.
Anpassung	Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.3.2 Skiabfahrt

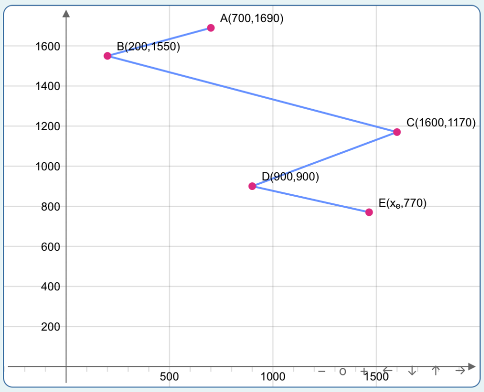
Tags	Betrag, Vektorrechnung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Die Kandahar-Abfahrt in Garmisch gilt als eine der anspruchsvollsten Rennstrecken im alpinen Ski-Weltcup. Die Abfahrt eine Gesamtlänge von $3300\,\mathrm{m}$, startet bei einer Höhe von $1690\,\mathrm{m}$ und geht bei einer Höhe von $770\,\mathrm{m}$ ins Ziel. Die Abfahrt wird im Folgenden durch die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ zwischen den Punkten A, B, C, D und E mit

$$A = (700, 1690),$$
$$B = (200, 1550),$$
$$C = (1600, 1170),$$
$$D = (900, 900)$$
$$E = (x_e, 770)$$

im Profil modelliert.

Die folgende Abbildung zeigt das gewählte Modell der Abfahrt.



(a) Bestimmen Sie die Länge L der Abfahrt von A über B und C nach D und geben Sie L bis auf eine Dezimalstelle genau an.

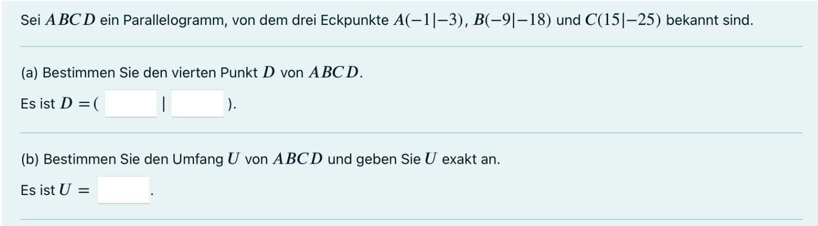
Es ist $L =$ ____.

(b) Bestimmen Sie die x-Koordinate x_e vom Zielpunkt E, wobei x_e als größer als die x-Koordinate D_x von Punkt D angenommen wird. Geben Sie x_e bis auf eine Dezimalstelle genau an.

Es ist $x_e =$ ____.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist eine Skiabfahrt im Profil durch die aufeinander folgenden Wegstrecken zwischen Punkten A, B, C, D und E näherungsweise modelliert. Gegeben sind die x- und y-Koordinaten der Wegpunkte A, B, C und D, die Gesamtlänge der Strecke, sowie die y-Koordinate von Punktes E. In Aufgabenteil (a) soll die Länge des Teilstrecke der Abfahrt zwischen den Punkten A, B, C, D berechnet und bis auf eine Dezimalstelle genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die fehlende x-Koordinaten x_e des Zielpunktes E berechnet und bis auf genau eine Dezimalstelle genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	
Randomisierung	Die x- und y-Koordinaten der Punkte A, B, C und D sowie die y-Koordinate des Punktes E werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.3.3 Umfang von Parallelogrammen

Tags	Vektorrechnung, Umfang, Parallelogramm
Screenshot	(Stand 29.07.2024)  Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, von dem drei Eckpunkte $A(-1\|-3)$, $B(-9\|-18)$ und $C(15\|-25)$ bekannt sind. (a) Bestimmen Sie den vierten Punkt D von $ABCD$. Es ist $D = ($ | $)$. (b) Bestimmen Sie den Umfang U von $ABCD$ und geben Sie U exakt an. Es ist $U =$.
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Durch vier Punkte A, B, C und D in $\mathbb{R}^2$ ist ein Parallelogramm definiert. Die Koordinaten der Punkte A, B und C sind explizit angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Koordinaten des Eckpunktes D berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Umfang des Parallelogramms bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Länge von Vektoren, Vektoraddition und -subtraktion.
Randomisierung	Die Koordinaten der Punkte A, B und C sind zufällig als ganze Zahlen gewählt, sodass der Umfang in Aufgabenteil (b) eine positive ganze Zahl ist.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

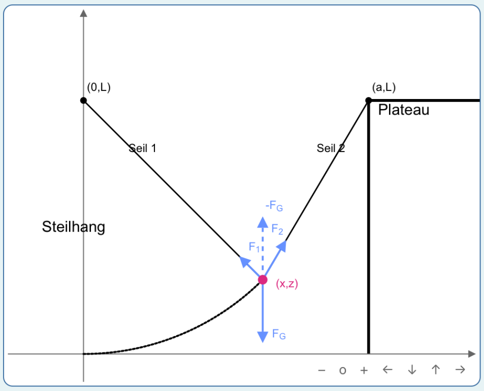
2.1.3.4 Bergsteigerin (2/2)

Tags	Vektorrechnung, Kräftegleichgewicht, Pythagoras, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt.

Die Zugkraft $\vec{F}_1$ des Seils 1 hält die Bergsteigerin in Richtung des Steilhangs. Die Kraft $\vec{F}_2$ ist die Kraft, mit welcher eine Person auf dem Plateau die Bergsteigerin im Punkt (x, z) halten muss. Zudem wirkt die Gewichtskraft $F_G = -mg$ auf die Bergsteigerin.

Die folgende Abbildung stellt die in den Seilen 1 und 2 hängende Bergsteigerin dar. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass sich der Fuß des Steilhangs am Punkt $(0, 0)$ und der Befestigungspunkt von Seil 1 am Punkt $(0, L)$ in der (x, z)-Ebene eines zweidimensionalen Koordinatensystems befindet. Der Befestigungspunkt von Seil 2 am Plateau befindet sich dann am Punkt (a, L).



Die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$, mit denen die Bergsteigerin im Punkt (x, z) von Seil 1 und Seil 2 gehalten wird, lassen sich in Abhängigkeit der x-Komponente der Position (x, z) der Bergsteigerin, der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau, der Masse m der Bergsteigerin und der Schwerebeschleunigung g zu

$$\vec{F}_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{g\,m\,(a-x)\,x}{a\,\sqrt{L^2-x^2}} \\ \frac{g\,m\,(a-x)}{a} \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{g\,m\,(a-x)\,x}{a\,\sqrt{L^2-x^2}} \\ \frac{g\,m\,x}{a} \end{pmatrix}$$

angeben. Zur Betrachtung von Grenzfällen der Kräfte müssen die Beträge dieser bestimmt werden.

(a) Bestimmen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$.

(i) Der Betrag von $\vec{F}_1(x)$ ist $|\vec{F}_1(x)| =$ ______.

(ii) Der Betrag von $\vec{F}_2(x)$ ist $|\vec{F}_2(x)| =$ ______.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Grenzfälle der Beträge der Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$. Die Beträge der Kräfte werden durch $F_1(x) = |\vec{F}_1(x)|$ und $F_2(x) = |\vec{F}_2(x)|$ ausgedrückt.

(i) Für $x = a$ und $L \geq a$ ist

$F_1(x) =$ ______,

$F_2(x) =$ ______.

(ii) Für a gegen ∞ ist

$F_1(x) =$ ______,

$F_2(x) =$ ______.

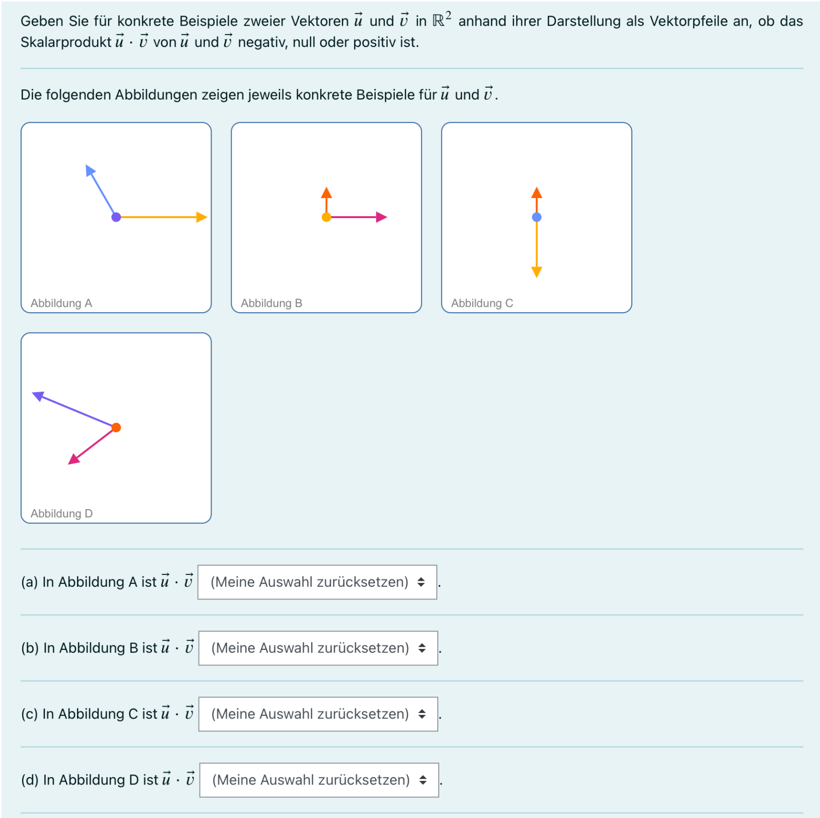
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt. Die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$, die entlang von Seil 1 beziehungsweise Seil 2 auf die Bergsteigerin an Punkt (x, z) wirken, wurde in Aufgabe 2.1.1.3 bestimmt und sind hier angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Beträge $\lvert\vec{F}_1\rvert$ und $\lvert\vec{F}_2\rvert$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Beträge $\lvert\vec{F}_1\rvert$ und $\lvert\vec{F}_2\rvert$ für die Grenzfälle (i) $x = a$ und $L \geq a$ und (ii) $a \to \infty$ untersucht werden.
Vorkenntnisse	Satz von Pythagoras, Betrag eines Vektors, Betrachtung von Grenzfällen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge : 0 Feedback unterdrücken : ja

2.1.4 Winkel und Skalarprodukt

2.1.4.1 Skalarprodukt (1)

Tags	Skalarprodukt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe zeigen vier Abbildungen A bis D je zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die an dem selben Punkt angeheftet sind. In den Aufgabenteilen (a) bis (d) soll jeweils eine wahre Aussage über das Signum des Skalarproduktes der in der zugehörigen Abbildung dargestellten Vektoren formuliert werden.
Vorkenntnisse	Skalarprodukt
Randomisierung	Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, sowie die Länge von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.1.4.2 Skalarprodukt (2) (nichtorthogonale Basis)

Tags	Vektorrechnung, Skalarprodukt, nichtorthogonale Basis.
Screenshot	(Stand 22.08.2024)

Betrachten Sie eine normalisierte aber nicht orthogonale Basis $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i = 1 \text{ mit } i = 1,2,3, \qquad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = \frac{1}{2}, \qquad \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_1 = \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_2 = 0.$$

Weiter seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \sqrt{3}\,\vec{g}_3, \qquad \vec{v}_2 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 - \sqrt{3}\,\vec{g}_3.$$

Berechnen Sie den Betrag des Vektors $|\vec{v}_i| = \sqrt{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ für $i = 1,2$ und das Skalarprodukt $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ kann mit Hilfe von `sqrt(x)` eingegeben werden.

(a) Es ist $|\vec{v}_1| =$ ____.

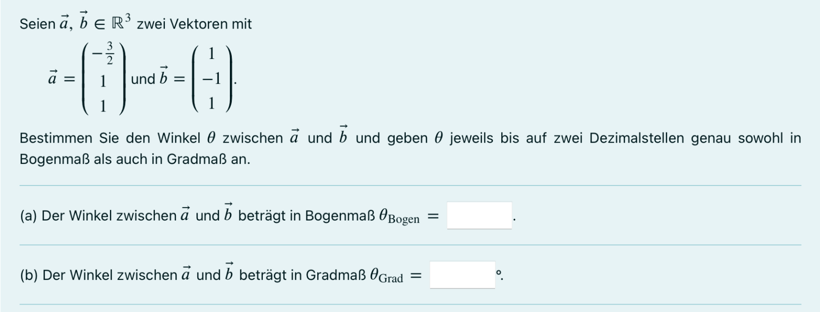
(b) Es ist $|\vec{v}_2| =$ ____.

(c) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 =$ ____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in $\mathbb{R}^3$ sind als Linearkombinationen der nichtorthogonalen Basisvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$ gegeben. In Aufgabenteil (a) wird der Betrag von $\vec{v}_1$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird der Betrag von $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (c) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt, Betrag eines Vektors.
Randomisierung	Der Vorfaktor des Basisvektors $\vec{g}_3$ wird in den o.g. Linearkombinationen zufällig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.4.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Tags	Bogenmaß, Gradmaß, Vektorrechnung, Winkel
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Winkel θ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und geben θ jeweils bis auf zwei Dezimalstellen genau sowohl in Bogenmaß als auch in Gradmaß an.

(a) Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt in Bogenmaß $\theta_{\text{Bogen}} =$.

(b) Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt in Gradmaß $\theta_{\text{Grad}} =$ °.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In Aufgabenteil (a) soll der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Bogenmaß berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Gradmaß berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Winkel zwischen zwei Vektoren, Darstellungsformen von Winkeln
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden zufällig als rationale Zahlen gewählt.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können beliebig als rationale Zahlen gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

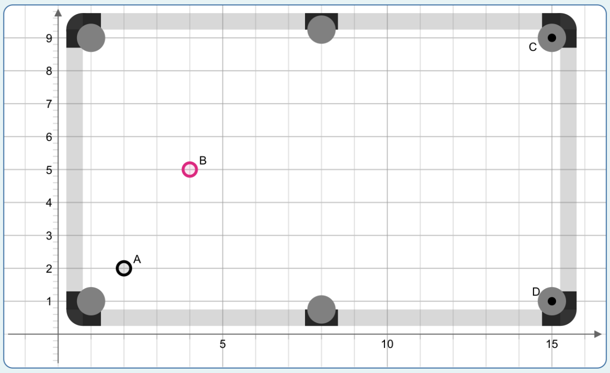
2.1.4.4 Kollision von Billardkugeln

Tags Vektorrechnung, Vektorbetrag, Winkel

Screenshot (Stand 29.07.2024)

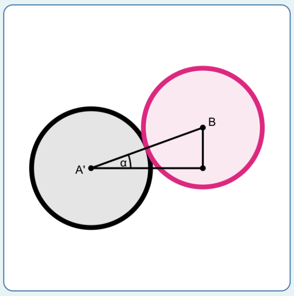
Die Spielfläche eines Billardtisches wird in Draufsicht als Teilmenge eines zweidimensionalen Koordinatensystem modelliert, wobei die Skalierung so gewählt ist, dass eine Längeneinheit im Koordinatensystem genau $1\,\mathrm{dm}$ entspricht. Zwei der vier Kanten der Spielfläche liegen auf den positiven Teilen der x- und der y-Achse liegen. Die Mittelpunkte zweier benachbarte Ecktaschen liegen an den Punkten $C(15|9)$ und $D(15|1)$. Die Mittelpunkte zweier Kugeln liegen an den Punkten $A(2|2)$ und $B(4|5)$, wobei beide Kugelneinem Durchmesser von jeweils $d = 57,2\,\mathrm{mm}$ haben.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation. Die Kugel an Punkt A ist durch ○ gekennzeichnet und die Kugel an Punkt B ist durch ○ gekennzeichnet. Die Ecktaschen an den Punkten C und D sind jeweils durch ● gekennzeichnet.



Die Kugel an Punkt A wird so gespielt, dass sie an Punkt A' mit der Kugel an Punkt B kollidiert und dass die Kugel an Punkt B direkt nach der Kollision zu Punkt C rollt. Der Kollisionswinkel, den die Gerade durch A' und B mit der Horizontalen einschließt, werde mit α bezeichnet. Beachten Sie, dass der Impuls hierbei nur entlang der Geraden durch A' und B übertragen wird.

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Kugeln schematisch in der Draufsicht zum Zeitpunkt des Zusammenstoßes an den Punkten A' und B.



(a) Berechnen Sie den Kollisionswinkel α und geben Sie α in Gradmaß bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\alpha =$ ____ °.

(b) Berechnen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{A'B}$ und geben Sie $\overrightarrow{A'B}$ in dm bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\overrightarrow{A'B} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ dm.

(c) Berechnen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AA'}$ und geben Sie $\overrightarrow{AA'}$ in dm bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ dm.

(d) Berechnen Sie den analog zum Kollisionswinkel α den Winkel β, den die Gerade durch A und A' mit der Horizontalen einschließt, und geben Sie β in Gradmaß bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\beta =$ ____ .

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	Eine Billardkugel wird angespielt und kollidiert mit einer weiteren Billardkugel, sodass letztere in eine der Ecktaschen des Billardtisches fällt. Mit Hilfe ebener Geometrie sollen in dieser Aufgabe Richtungsvektoren und Winkel bei der Kollision der beiden Kugeln untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll mithilfe der Positionen der Kugeln zum Zeitpunkt der Kollision und der Position der Ecktaschen der Kollisionswinkel α berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll der Verbindungsvektor zwischen den Positionen der Kugeln zum Zeitpunkt der Kollision der Kugeln berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (c) soll der Verbindungsvektor zwischen der initialen Position und der Position bei Kollision der angespielten Kugel berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (d) soll der Winkel zwischen der geradlinigen Bahn der angespielten Kugel und der langen Seite des Billardtisches berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden.
Randomisierung	Die Postionen der Billiardkugeln werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.4.5 Methanmolekül

Tags	Winkel, Skalarprodukt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Ein Tetraeder wird als Modell eines Methanmoleküls verwendet. Dabei stellen die vier Eckpunkte

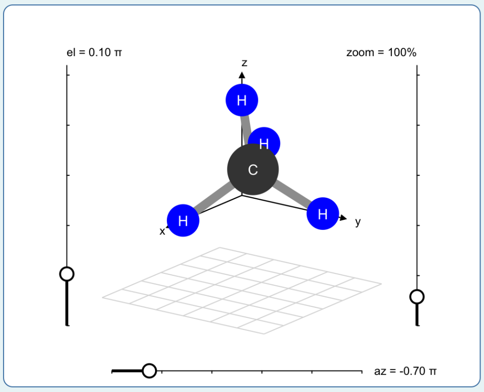
$H_1(3,0,0)$, $H_2(0,3,0)$, $H_3(0,0,3)$, $H_4(3,3,3)$

des Tetraeders die vier Wasserstoffatome und der Mittelpunkt

$C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

des Tetraeders das Kohlenstoffatom dar.

Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft ein Methanmolekül als Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.



Der Winkel α zwischen den Strecken $\overline{CH_1}$ und $\overline{CH_2}$ wird Bindungswinkel genannt. Berechnen Sie den Bindungswinkel α im Methanmolekül und geben Sie α in Gradmaß auf zwei Nachkommastellen genau an.

Es ist $\alpha =$ ______.

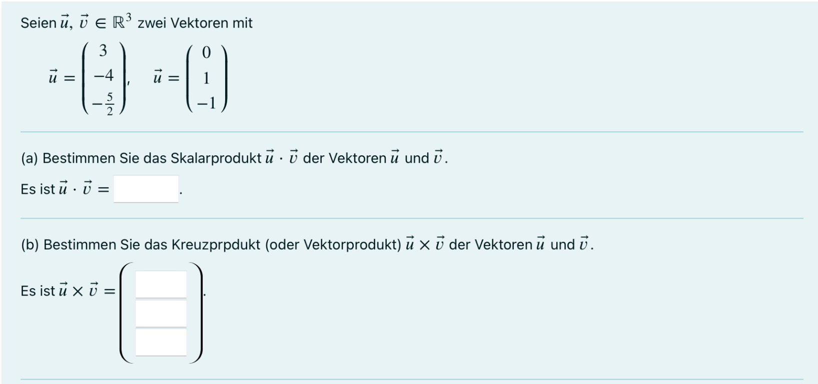
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Bindungswinkel α im Methanmolekül berechnet und bis auf die angegebene Genauigkeit angegeben werden. Dazu wird ein Tetraeder als Modell des Methanmoleküls verwendet: Die Wasserstoffatome werden als die Eckpunkte $H_1 = (h, 0, 0)$, $H_2 = (0, h, 0)$, $H_2 = (0, 0, h)$, $H_4 = (h, h, h)$ und das Kohlenstoffatom $C = (\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ als der Mittelpunkt des Tetraeders modelliert.
Vorkenntnisse	Betrag von Vektoren, Länge von Vektoren, Addition und Subtraktion
Randomisierung	Der Parameter h in der Definition der Punkte H_1, ... , H_4 und C wird zufällig als ganze Zahl zwischen 2 und 5 gewählt.
Anpassung	Der Eintrag h kann als beliebige positive ganze Zahl gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.5 Vektorprodukt

2.1.5.1 Elementare Vektoroperationen (2))

Tags Vektorrechnung, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Screenshot (Stand 29.07.2024)


Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v}$ der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Es ist $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ____ .

(b) Bestimmen Sie das Kreuzprpdukt (oder Vektorprodukt) $\vec{u} \times \vec{v}$ der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Es ist $\vec{u} \times \vec{v} =$ (____) .

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ sind gegeben. In Aufgabenteil (a) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Vektor- oder Kreuzprodukt berechnet und angegeben.

Vorkenntnisse Standardskalarprodukt, Kreuzprodukt

Randomisierung Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig als ganzzahlige Vielfach von $\frac{1}{3}$ gewählt, sodass das Standardskalarprodukt und das Kreuzprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ jeweils ungleich null ist.

Anpassung Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.

Sonderoption Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.2 Skalar- und Vektorprodukt

Tags	Vektorrechnung, Skalarprodukt, Vektorprodukt
Screenshot	(Stand 22.08.2024)

Bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = 3\,\vec{e}_3 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1,$$

$$\vec{v}_2 = 4\,\vec{e}_3 + 4\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_1,$$

$$\vec{v}_3 = 2\,\vec{e}_3 - 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_1.$$

Berechnen Sie die folgenden Skalar- und Vektorprodukte. Dabei bezeichne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ das Skalarprodukt und $\vec{a} \times \vec{b}$ das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ an. Die Basisvektoren können als e1, e2, e3 in den Antwortfeldern eingegeben werden, z.B. 2*e1 + 3*e2 -3*e3.

(a) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 =$ _____.

(b) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 =$ _____.

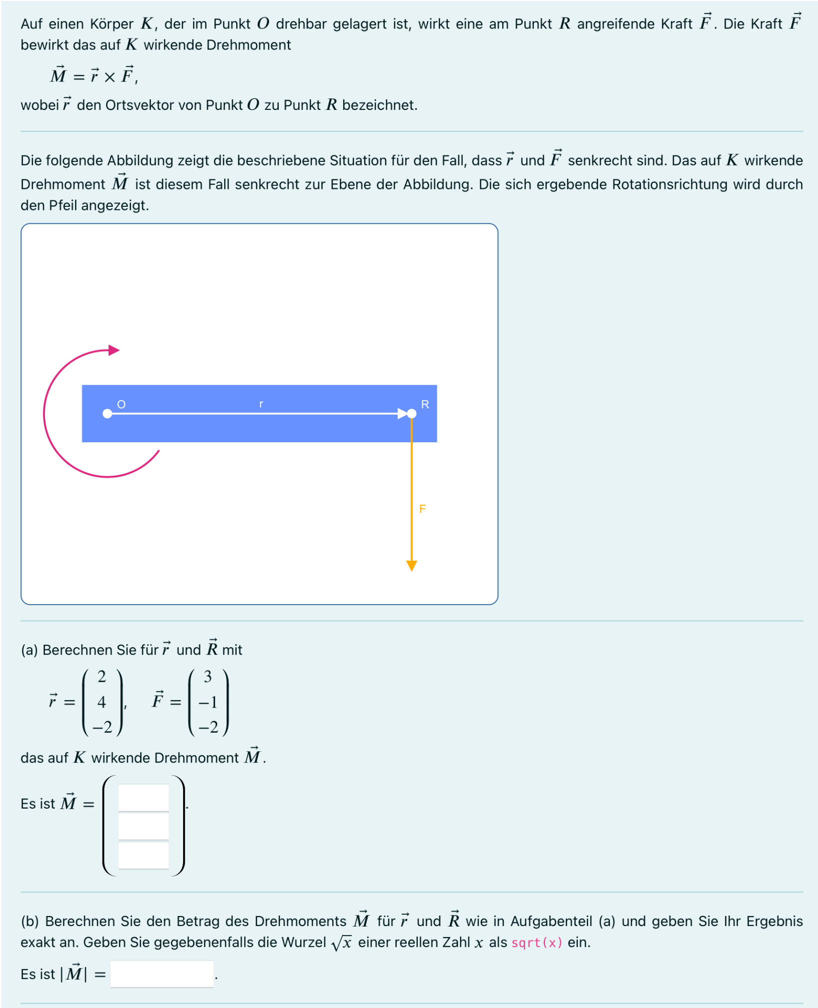
(c) Es ist $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_3 =$ _____.

(d) Es ist $\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1\right) \times \vec{v}_3 =$ _____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$ sind gegeben. In Aufgabenteil (a) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_1$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (c) wird das Spatprodukt von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (d) wird das doppelte Kreuzprodukt von $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt, Kreuzprodukt.
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.3 Drehmoment

Tags	Vektorrechnung, Betrag, Kreuzprodukt, Drehmoment
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Auf einen Körper K, der im Punkt O drehbar gelagert ist, wirkt eine am Punkt R angreifende Kraft $\vec{F}$. Die Kraft $\vec{F}$ bewirkt das auf K wirkende Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor von Punkt O zu Punkt R bezeichnet.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation für den Fall, dass $\vec{r}$ und $\vec{F}$ senkrecht sind. Das auf K wirkende Drehmoment $\vec{M}$ ist diesem Fall senkrecht zur Ebene der Abbildung. Die sich ergebende Rotationsrichtung wird durch den Pfeil angezeigt.

(a) Berechnen Sie für $\vec{r}$ und $\vec{R}$ mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

das auf K wirkende Drehmoment $\vec{M}$.

Es ist $\vec{M} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments $\vec{M}$ für $\vec{r}$ und $\vec{R}$ wie in Aufgabenteil (a) und geben Sie Ihr Ergebnis exakt an. Geben Sie gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl x als `sqrt(x)` ein.

Es ist $|\vec{M}| =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Auf einen Körper, der in einem Punkt drehbar gelagert ist, wirkt eine am Punkt R angreifende Kraft $\vec{F}$, die ein Drehmoment $\vec{M}$ auf den Körper bewirkt. In Aufgabenteil (a) soll das Drehmoment $\vec{M}$ für eine Kraft $\vec{F}$ und einen Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes R berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Betrag von $\vec{M}$ aus Aufgabenteil (a) berechnet werden.
Vorkenntnisse	Betrag von Vektoren, Länge von Vektoren, Addition / Subtraktion
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{r}$ werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -8 und 8 gewählt, sodass $\vec{M}$ ungleich null ist.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{r}$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.4 Flächeninhalt Dreieck

Tags: Flächeninhalt, Dreieck, Kreuzprodukt, Betrag, Vektorbetrag, Vektorrechnung

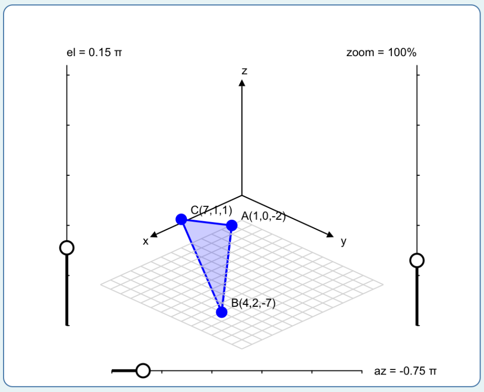
Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ wird durch die Punkte

$A(1,0,-2)$,
$B(4,2,-7)$,
$C(7,1,1)$

ein Dreieck ΔABC definiert.

Die folgende Abbildung zeigt ΔABC.



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und geben Sie diesen exakt an. Geben Sie gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ als `sqrt(x)` ein.

Es ist $F =$ ____ .

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Es sind drei Punkte A, B und C in $\mathbb{R}^3$ gegeben. In dieser Aufgabe wird der Flächeninhalt des durch die Punkte A, B und C definierten Dreiecks berechnet und angegeben werden.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt und Kreuzprodukt, Betrag von Vektoren, Bestimmung von Richtungsvektoren
Randomisierung	Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -7 und 7 gewählt, sodass die Punkte A, B und C ein Dreieck definieren.
Anpassung	Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja