1 Grundbegriffe

1.1 Äquivalenzumformungen von Termen, Gleichungen und Ungleichungen

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Äquivalenzumformungen von Termen, Gleichungen und Ungleichungen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf polynomialen Gleichungen und Ungleichungen sowie auf Betrags- und exponentiellen Ungleichungen. Physikalische Gesetze wie das Newtonsche Gravitationsgesetz, das Stefan-Boltzmann Gesetz und das Hagen-Poiseuille Gesetz werden herangezogen, um die Anwendung mathematischer Umformungen in der Physik zu demonstrieren. Dabei wird auf den Umgang mit physikalischen Einheiten, die Berücksichtigung signifikanter Stellen und die Interpretation von Abhängigkeiten physikalischer Größen eingegangen.

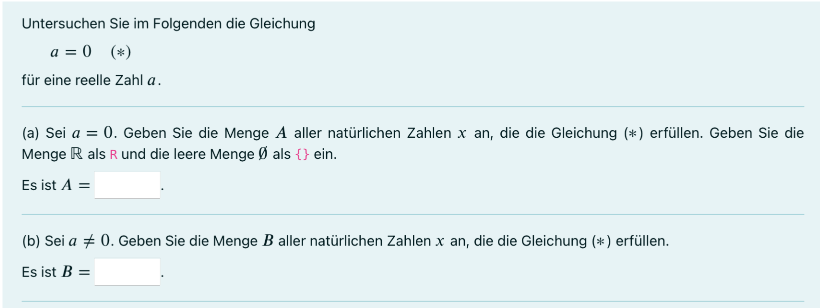
Inhaltsverzeichnis

1.1.1 Gleichungen

1.1.1.1 Polynomiale Gleichungen (1) (konstant)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$a = 0 \quad (*)$

für eine reelle Zahl a.

(a) Sei $a = 0$. Geben Sie die Menge A aller natürlichen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen. Geben Sie die Menge $\mathbb{R}$ als R und die leere Menge $\emptyset$ als {} ein.

Es ist $A =$.

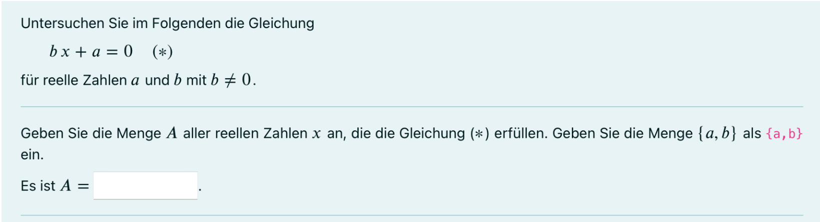
(b) Sei $a \neq 0$. Geben Sie die Menge B aller natürlichen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen.

Es ist $B =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung $$a = 0$$ unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.2 Polynomiale Gleichungen (2) (linear)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$b\,x + a = 0 \quad (*)$$

für reelle Zahlen a und b mit $b \neq 0$.

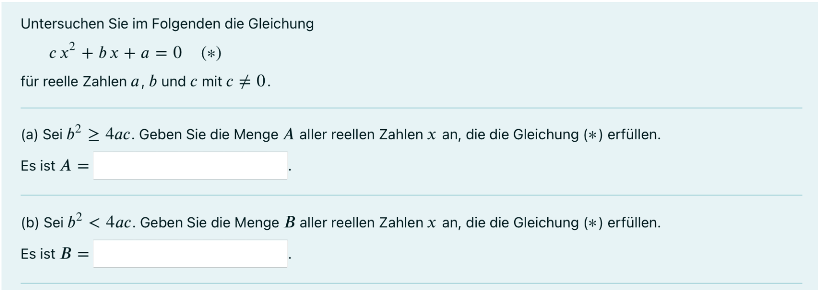
Geben Sie die Menge A aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen. Geben Sie die Menge $\{a, b\}$ als `{a,b}` ein.

Es ist $A =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung $$b\,x + a = 0$$ unter der Bedingung $b \neq 0$ erfüllen.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.3 Polynomiale Gleichungen (3) (quadratisch)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$c\,x^2 + b\,x + a = 0 \quad (*)$$

für reelle Zahlen a, b und c mit $c \neq 0$.

(a) Sei $b^2 \geq 4ac$. Geben Sie die Menge A aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen.

Es ist $A =$.

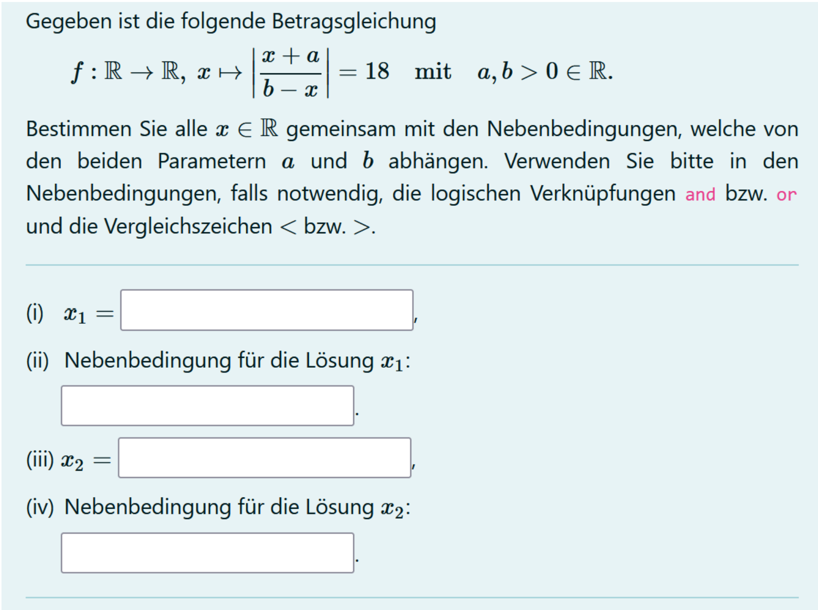
(b) Sei $b^2 < 4ac$. Geben Sie die Menge B aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen.

Es ist $B =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung $$c\,x^2 + b\,x + a = 0$$ unter der Bedingung $c \neq 0$ und den Bedingungen $b^2 \geq c\,a$ in Aufgabenteil (a) und $b^2 < c\,a$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.4 Betragsgleichung (1)

Tags	Betragsgleichung, logische Verknüpfungen.
Screenshot	(Stand 13.09.2024)



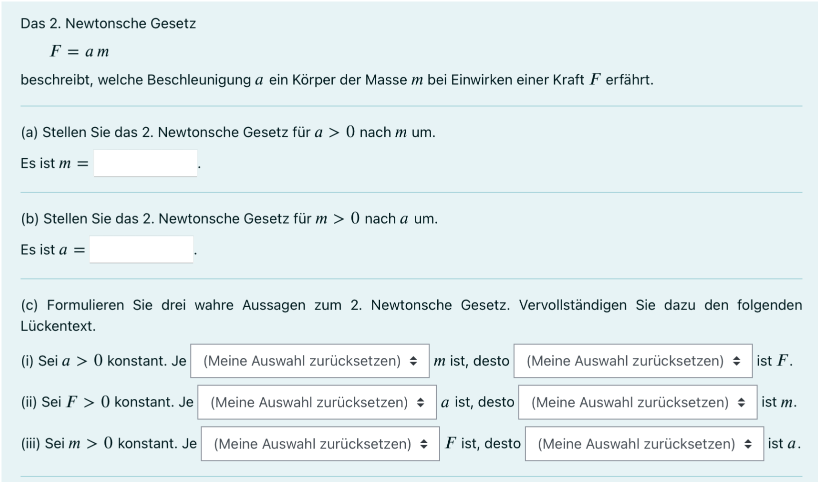
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine einfache Betragsgleichung mit zwei beliebigen Parametern a und b ist gegeben. In Aufgabenteilen (i-iv) werden die zwei Lösungen und jeweils die dazugehörigen Nebenbedingungen in Abhängigkeit der beiden Parameter a und b berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	solve.
Vorkenntnisse	Betrag, logische Verknüpfungen, Fallunterscheidung.
Randomisierung	Die rechte Seite der Betragsgleichung wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.1.2 Physikalische Gesetze als Beispiel von Gleichungen

1.1.2.1 2. Newtonsche Gesetz (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Das 2. Newtonsche Gesetz

$$F = a\,m$$

beschreibt, welche Beschleunigung a ein Körper der Masse m bei Einwirken einer Kraft F erfährt.

(a) Stellen Sie das 2. Newtonsche Gesetz für $a > 0$ nach m um.

Es ist $m =$ ____ .

(b) Stellen Sie das 2. Newtonsche Gesetz für $m > 0$ nach a um.

Es ist $a =$ ____ .

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum 2. Newtonsche Gesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Sei $a > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) m ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist F.

(ii) Sei $F > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) a ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist m.

(iii) Sei $m > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) F ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist a.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das 2. Newtonsche Gesetz

$$F = m\,a$$

nach der Masse m und nach der Beschleunigung a umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung: keine

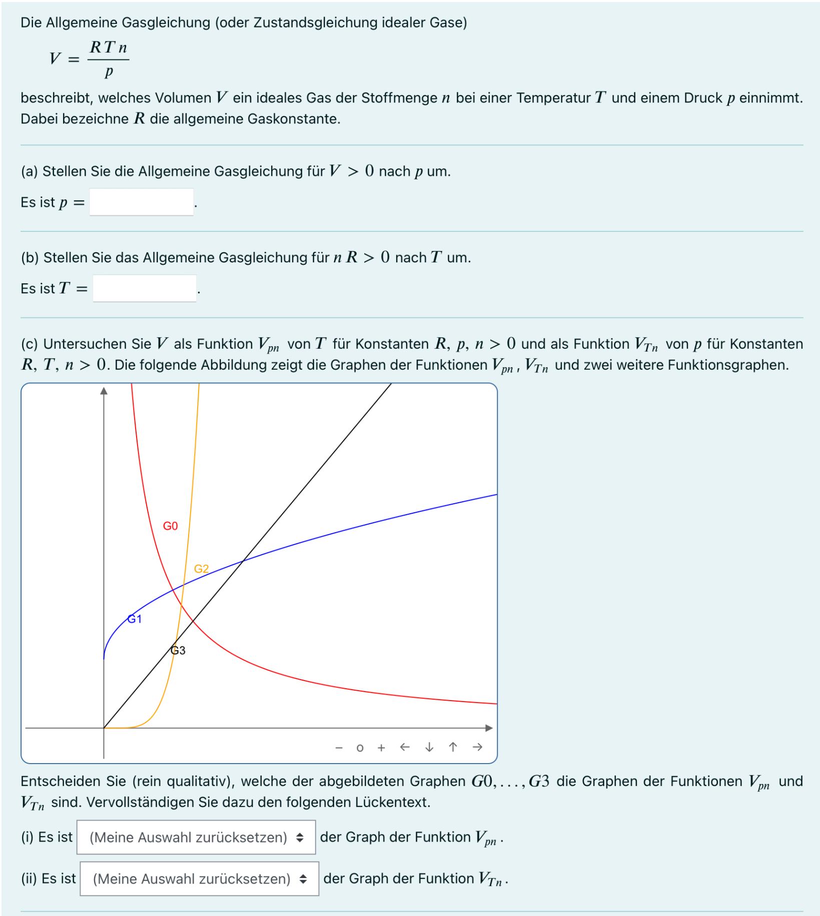
Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.2 Allgemeine Gasgleichung (1)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Funktionsgraph
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Die Allgemeine Gasgleichung (oder Zustandsgleichung idealer Gase)

$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

beschreibt, welches Volumen V ein ideales Gas der Stoffmenge n bei einer Temperatur T und einem Druck p einnimmt. Dabei bezeichne R die allgemeine Gaskonstante.

(a) Stellen Sie die Allgemeine Gasgleichung für $V > 0$ nach p um.

Es ist $p =$.

(b) Stellen Sie das Allgemeine Gasgleichung für $n\,R > 0$ nach T um.

Es ist $T =$.

(c) Untersuchen Sie V als Funktion V_{pn} von T für Konstanten $R,\ p,\ n > 0$ und als Funktion V_{Tn} von p für Konstanten $R,\ T,\ n > 0$. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen V_{pn}, V_{Tn} und zwei weitere Funktionsgraphen.

Entscheiden Sie (rein qualitativ), welche der abgebildeten Graphen $G0, \ldots, G3$ die Graphen der Funktionen V_{pn} und V_{Tn} sind. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Es ist (Meine Auswahl zurücksetzen) der Graph der Funktion V_{pn}.

(ii) Es ist (Meine Auswahl zurücksetzen) der Graph der Funktion V_{Tn}.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die allgemeine Gasgleichung $V = \frac{R\,T\,n}{p}$ nach dem Druck p in Aufgabenteil (a) und nach der Temperatur T in Aufgabenteil (b) umgestellt werden. In Aufgabenteil (c) sollen aus vier Graphen die Graphen ausgewählt werden, die rein qualitativ das Volumen V in Abhängigkeit der Temperatur T bzw. das Volumen V in Abhängigkeit des Drucks p jeweils bei Festhalten der übrigen Bestimmungsgrößen beschreiben.
Vorkenntnisse	Äquivalenzumformung, Erkennen charakteristischer Funktionsgraphen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

Bemerkung	Aufgabe 4.2.4.4 behandelt ebenfalls die Allgemeine Gasgleichung im Themenfeld der mehrdimensionalen Analysis.

1.1.2.3 Barometrische Höhenformel (1)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Exponentialfunktion, Logarithmus
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe der barometrischen Höhenformel

$$p = p_0\, e^{-\frac{g\,h\,\rho_0}{p_0}}$$

den Zusammenhang zwischen der Flughöhe h eines Airbus A321XLR, dem Luftdruck p auf Flughöhe, dem Luftdruck p_0 am Boden und der Dichte ρ_0 der Luft am Boden. Es bezeichne g die Erdbeschleunigung.

Das Pitot-Statik-System eines Airbus A321XLR zeigt einen Luftdruck p von $3.06 \cdot 10^4$ Pa an. Die Flugverkehrskontrolle meldet einen Luftdruck p_0 von $1.0135 \cdot 10^5$ Pa und Dichte ρ_0 der Luft von $1.1563 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ auf Höhe des Meeresspiegels. Berechnen Sie die Flughöhe h des Airbus A321XLR über dem Meeresspiegel und geben Sie diese in m auf 3 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Erdbeschleunigung g gleich $9.81 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist.

Es ist $h =$ ______ .

Autoren	Emma van der Smagt (RUB)
	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die barometrische Höhenformel

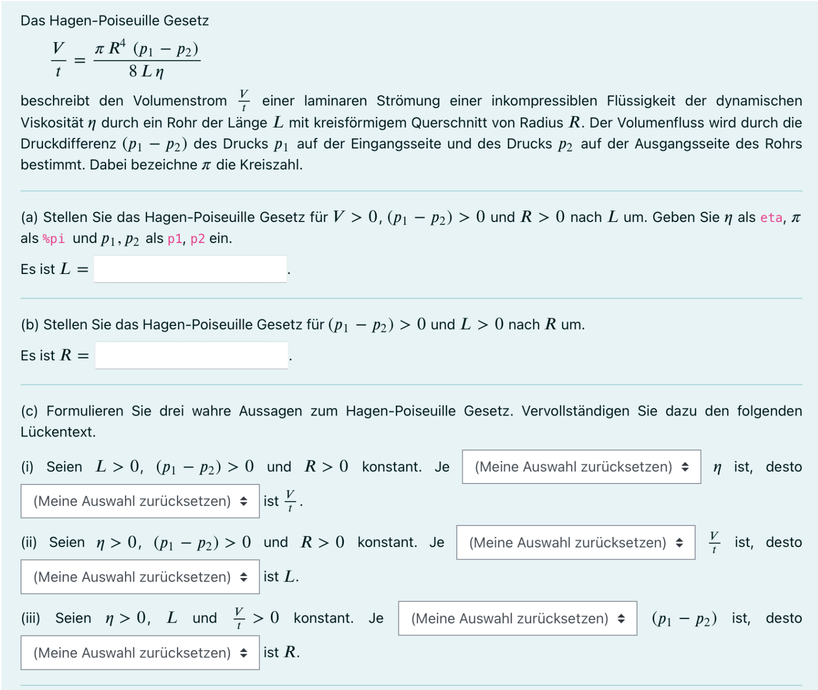
$$p = p_0\, e^{-\frac{gh\rho_0}{p_0}}$$

nach der Dichte ρ_0 auf Höhe null und nach der Höhe h umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.4 Hagen-Poiseuille Gesetz (1)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Das Hagen-Poiseuille Gesetz

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi\, R^4\, (p_1 - p_2)}{8\, L\, \eta}$$

beschreibt den Volumenstrom $\frac{V}{t}$ einer laminaren Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit der dynamischen Viskosität η durch ein Rohr der Länge L mit kreisförmigem Querschnitt von Radius R. Der Volumenfluss wird durch die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ des Drucks p_1 auf der Eingangsseite und des Drucks p_2 auf der Ausgangsseite des Rohrs bestimmt. Dabei bezeichne π die Kreiszahl.

(a) Stellen Sie das Hagen-Poiseuille Gesetz für $V > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ nach L um. Geben Sie η als `eta`, π als `%pi` und p_1, p_2 als `p1`, `p2` ein.

Es ist $L =$.

(b) Stellen Sie das Hagen-Poiseuille Gesetz für $(p_1 - p_2) > 0$ und $L > 0$ nach R um.

Es ist $R =$.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum Hagen-Poiseuille Gesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Seien $L > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) η ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist $\frac{V}{t}$.

(ii) Seien $\eta > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) $\frac{V}{t}$ ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist L.

(iii) Seien $\eta > 0$, L und $\frac{V}{t} > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) $(p_1 - p_2)$ ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist R.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Jörg Härterich
	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Hagen-Poiseuille Gesetz

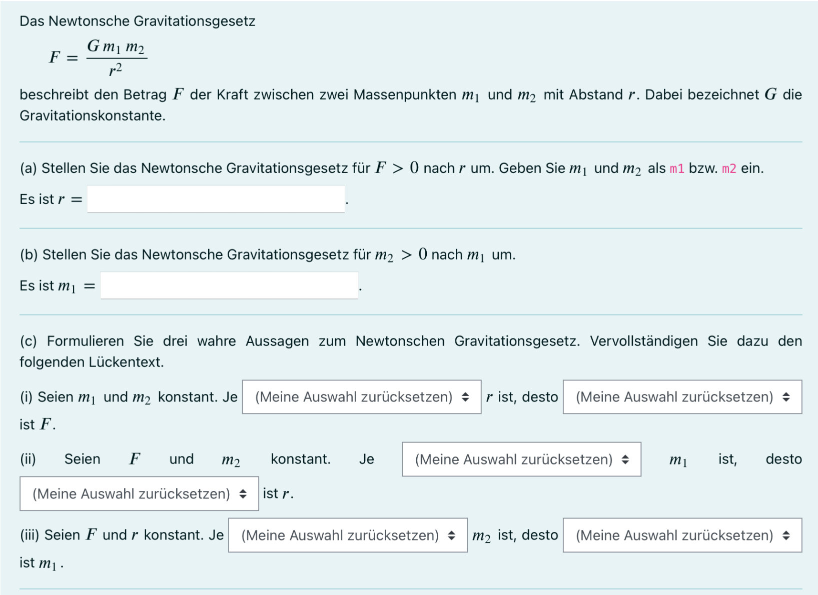
$$\frac{V}{t} = \frac{\pi\,(p1 - p2)\,R^4}{8\,\eta\,L}$$

nach der Länge L und nach dem Radius R des Rohr mit kreisförmigem Quesrchnitt jeweils in Abhängigkeit des Volumenstroms $\frac{V}{t}$, der Druckdifferenz $p1 - p2$ am Ein- und Ausgang des Rohrs und der dynamischen Viskosität η umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.5 Newtonsches Gravitationsgesetz (1)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

beschreibt den Betrag F der Kraft zwischen zwei Massenpunkten m_1 und m_2 mit Abstand r. Dabei bezeichnet G die Gravitationskonstante.

(a) Stellen Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz für $F > 0$ nach r um. Geben Sie m_1 und m_2 als `m1` bzw. `m2` ein.

Es ist $r =$ _____.

(b) Stellen Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz für $m_2 > 0$ nach m_1 um.

Es ist $m_1 =$ _____.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum Newtonschen Gravitationsgesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Seien m_1 und m_2 konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) r ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist F.

(ii) Seien F und m_2 konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) m_1 ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist r.

(iii) Seien F und r konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) m_2 ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist m_1.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Newtonsche Gravitationsgesetz $F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$ nach dem Abstand r und nach der Masse m_1 umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.6 Newtonsches Gravitationsgesetz (2)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Auf einen künstlichen Satelliten S der vernachlässigbar kleinen Masse m auf einem konzentrischen Orbit mit Radius r um die Erde wirkt die Gravitationskraft

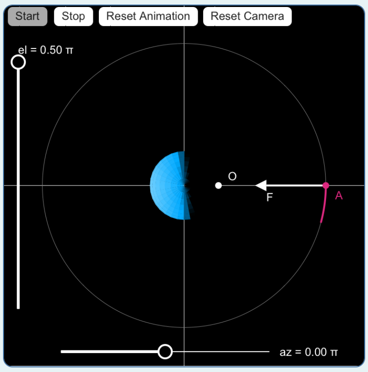
$$F_G = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

als Zentripetalkraft

$$F_p = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2\,r.$$

Dabei bezeichnen G die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde, v die Umlaufgeschwindigkeit von S auf dem Orbit und ω die zugehörige Winkelgeschwindigkeit.

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft einen Satelliten A auf seinem konzentrischen äquatorialen Orbit um den Planeten Erde im Bezugssystem eines Beobachters O auf der Erdoberfläche. Die als an A angehefteter Vektorpfeil F dargestellte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft und wirkt in diesem Spezialfall einer konzentrischen Umlaufbahn als Zentripetalkraft orthogonal zur Umlaufbahn.



(a) Geben Sie den Radius r des Orbits von S in Abhängigkeit der Masse M der Erde, der Bahngeschwindigkeit $v > 0$ von S und der Gravitationskonstante G an.

Es ist $r =$.

(b) Geben Sie den Radius r der Umlaufbahn von S in Abhängigkeit der Masse M der Erde, der Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ von S und der Gravitationskonstante G an. Geben Sie ω als `omega` ein.

Es ist $r =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Für einen künstlichen Satelliten vernachlässigbarer Masse auf einem konzentrischen Orbit um die Erde wirkt die Gravitationskraft F_G (siehe Aufgabe 1.1.2.5) als als Zentripetalkraft F_p. In dieser Aufgabe soll das Kräftegleichgewicht $F_G = F_p$ nach dem Radius r in Abhängigkeit von der Bahngeschwindigkeit v und in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω umgestellt werden.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung keine

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.7 Stefan-Boltzmann Gesetz (1)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$P = A\,T^4\,\sigma$$

beschreibt, welche Strahlungsleistung P ein idealer schwarzer Körper der Oberfläche A mit absoluter Temperatur T aussendet. Dabei bezeichne σ die Stefan-Boltzmann-Konstante.

(a) Stellen Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz für $T > 0$ nach A um. Geben Sie σ als `sigma` ein.

Es ist $A =$.

(b) Stellen Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz für $A > 0$ nach T um.

Es ist $T =$.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum 2. Newtonsche Gesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Sei $T > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) A ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist P.

(ii) Sei $P > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) T ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist A.

(iii) Sei $A > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) P ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist T.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$P = A\,T^4\,\sigma$$

nach der Oberfläche A und nach der Temperatur T eines idealen schwarzen Körpers umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung keine

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.8 Wurfparabel (1)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung, Trigonometrisch Funktion

Screenshot (Stand 29.07.2024)

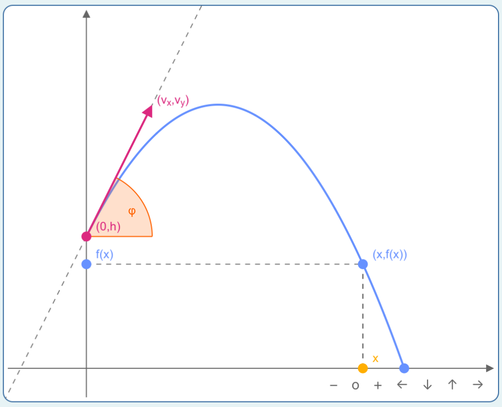
Die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

definierte Funktion beschreibt die Bahnkurve eines Körpers während eines Wurfs in einem homogenen Schwerefeld (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands). Dabei bezeichne $(0, h)$ den Ort und damit h die Höhe des Abwurfs, (v_x, v_y) die Geschwindigkeit des Abwurfs und g die Schwerebeschleunigung. Das Bild der durch $(c_x(t), c_y(t))$ definierten Funktion wird Wurfparabel genannt. Falls die Geschwindigkeit des Abwurfs ungleich null, so heißt der Winkel φ zwischen (v_x, v_y) und einer zur x-Achse parallelen Geraden durch $(0, h)$ Wurfwinkel.

Die folgende Abbildung zeigt die oben beschriebene Bahnkurve. Sie können den Ort $(0, h)$ des Wurfs entlang der y-Achse verschieben (Punkt ● auf der y-Achse) und die Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Wurfs durch Verschieben der Pfeilspitze des Vektors verändern (Pfeil →). Der Wurfwinkel φ ist als Kreisausschnitt (Sektor ◁) gekennzeichnet.

Beachten Sie, dass sich für $v_x \neq 0$ die Bahnkurve als Graph einer reellen Funktion f über der x-Achse darstellen lässt. Sie können das Funktionsargument x entlang der x-Achse verschieben (Punkt ● auf der x-Achse).



(a) Bestimmen Sie für $v_x \neq 0$ die reelle Funktion f, sodass $f(c_x(t)) = c_y(t)$ für alle $t > 0$ ist. Geben Sie v_x und v_y als vx bzw. vy ein.

Es ist $f(x) =$ ______.

(b) Geben Sie für $v_x \neq 0$ die reelle Funktion f in Abhängigkeit des Wurfwinkels $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und des Betrags $r = \|(v_x, v_y)\|$ der Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Abwurfs an, indem Sie v_x und v_y geeignet ersetzen. Geben Sie φ als phi ein.

Es ist $f(x) =$ ______.

Autoren Emma van der Smagt (RUB)
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

beschriebene Wurfparabel untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll eine Funktion f über der x-Achse angegeben werden, die die Eigenschaft $f(c_x(t)) = c_y(t)$ für alle t erfüllt. Insbesondere stimmt damit der Graph von f mit der Wurfparabel überein. In Aufgabenteil (b) sollen Geschwindigkeitsvektor (v_x, v_y) bezüglich ebener Polarkoordinaten dargestellt und dessen Komponenten in der Darstellung von f in Aufgabenteil (a) geeignet ersetzt werden.

Vorkenntnisse Äquivalenzumformung, trigonometrische Funktionen, ebene Polarkoordinaten

Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.9 Wurfparabel (2)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung, Nullstelle, Extremwert

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

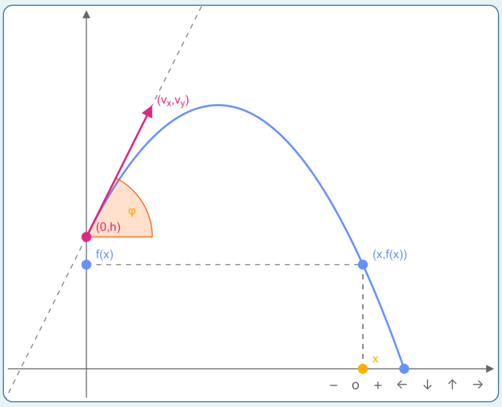
definierte Abbildung c beschreibt die Bahnkurve eines Körpers während eines Wurfs in einem homogenen Schwerefeld (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands). Dabei bezeichne $(0, h)$ den Ort und damit $h \geq 0$ die Höhe des Abwurfs, (v_x, v_y) die Geschwindigkeit des Abwurfs und $g > 0$ die Schwerebeschleunigung. Das Bild der durch $(c_x(t), c_y(t))$ definierten Funktion für $t \geq 0$ wird Wurfparabel genannt. Falls die Geschwindigkeit des Abwurfs ungleich null ist, so heißt der Winkel φ zwischen (v_x, v_y) und einer zur x-Achse parallelen Geraden durch $(0, h)$ Wurfwinkel. Für $v_x \neq 0$ lässt sich die Wurfparabel auch als Graph der durch

$$f(x) = -\frac{g\,x^2}{2\,v_x^2} + \frac{v_y\,x}{v_x} + h$$

definierten Funktion f über der x-Achse darstellen.

Die folgende Abbildung zeigt die oben beschriebene Bahnkurve. Sie können den Ort $(0, h)$ des Wurfs entlang der y-Achse verschieben (Punkt ● auf der y-Achse) und die Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Wurfs durch Verschieben der Pfeilspitze des Vektors verändern (Pfeil →). Der Wurfwinkel φ ist als Kreisausschnitt (Sektor ◅) gekennzeichnet.

Für $v_x \neq 0$ können Sie das Funktionsargument x von f entlang der x-Achse verschieben (Punkt ● auf der x-Achse).



(a) Bestimmen Sie für $v_x \geq 0$ den eindeutigen Punkt (x_M, y_M) der Wurfparabel, sodass für alle Punkt (x, y) auf der Wurfparabel $y \leq y_M$ gilt. Im Folgenden verstehen wir (x_M, y_M) als den höchsten Punkt auf der Bahnkurve des geworfenen Körpers. Wir bezeichnen y_M als maximale Wurfhöhe. Unterscheiden Sie dabei die folgenden Fälle. Geben Sie einen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` ein.

(i) Für $v_y > 0$ ist $(x_M, y_M) =$ ______.

(ii) Für $v_y \leq 0$ ist $(x_M, y_M) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie für $h > 0$ den eindeutigen Punkt (x_0, y_0), an dem die Wurfparabel die x-Achse schneidet. Im Folgenden verstehen wir (x_0, y_0) als den Punkt, an dem der geworfene Körper auf dem Boden auftrifft. Wir bezeichnen x_0 als Wurfweite.

Es ist $(x_0, y_0) =$ ______.

Autoren Emma van der Smagt (RUB)
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

beschriebene Wurfparabel untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die maximale Wurfhöhe als Extremwert der y-Komponente c_y bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll die Wurfweite als Nullstelle der y-Komponente c_y bestimmt werden.

Vorkenntnisse	Äquivalenzumformung, trigonometrische Funktionen, Bestimmung von Nullstellen, Charakterisierung von Extremstellen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3 Physikalische Gesetze und Umgang mit Einheiten

1.1.3.1 2. Newtonsche Gesetz (2)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

> Untersuchen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes
>
> $$F = m\,a$$
>
> den Zusammenhang zwischen der Schubkraft F, der Masse m und der Beschleunigung a der zweiten Stufe einer Falcon 9 Block 5.
>
> ---
>
> Das Vakuumtriebwerk Merlin 1D VAC der zweiten Stufe einer Falcon 9 Block 5 erzeugt eine maximal Schubkraft F von $9.786 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$. Die Gesamtmasse m der zweiten Stufe beträgt $9.2055 \cdot 10^4\,\mathrm{kg}$. Berechnen Sie die Beschleunigung a, die die zweite Stufe bei 80% ihrer maximalen Schubkraft erfährt, und geben Sie diese in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ auf 4 signifikante Stellen genau an.
>
> Es ist $a =$ ____ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe des 2. Newtonsche Gesetzes (siehe Aufgabe 1.1.2.1) die Beschleunigung a einer Rakete bei gegebener Schubkraft F und Masse m berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten
Randomisierung	Der Anteil der maximalen Schubkraft wird zwischen 5% und 95% in Schritten von 5% zufällig ausgewählt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.2 Barometrische Höhenformel (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten, Exponentialfunktion, Logarithmus
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe der barometrischen Höhenformel

$$p = p_0\, e^{-\frac{g\,h\,\rho_0}{p_0}}$$

den Zusammenhang zwischen der Flughöhe h eines Airbus A321XLR, dem Luftdruck p auf Flughöhe, dem Luftdruck p_0 am Boden und der Dichte ρ_0 der Luft am Boden. Es bezeichne g die Erdbeschleunigung.

Das Pitot-Statik-System eines Airbus A321XLR zeigt einen Luftdruck p von $2.41 \cdot 10^4$ Pa an. Die Flugverkehrskontrolle meldet einen Luftdruck p_0 von $1.0095 \cdot 10^5$ Pa und Dichte ρ_0 der Luft von $1.2491 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ auf Höhe des Meeresspiegels. Berechnen Sie die Flughöhe h des Airbus A321XLR über dem Meeresspiegel und geben Sie diese in m auf 3 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Erdbeschleunigung g gleich $9.81 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist.

Es ist $h =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe der barometrischen Höhenformel (siehe Aufgabe 1.1.2.3) die Flughöhe h eines Airbus A321XLR bei gegebenem Luftdruck p auf der Flughöhe und gegeben Luftdruck p_0 und -dichte ρ_0 auf Höhe des Meeresspiegels berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze
Randomisierung	Es werden der Luftdruck p_0 zufällig zwischen 1003 hPa und 1028,5 hPa in Schritten von 0,5 hPa, die Lufttemperatur auf Höhe des Meeresspiegels zufällig zwischen 273,5 K und 309,2 K in Schritten von 0,7 K und die Flughöhe h zufällig zwischen 9300 m und 12000 m in Schritten von 100 m ausgewählt und daraus mithilfe der barometrischen Höhenformel der Luftdruck p auf der Flughöhe bestimmt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.3 Newtonsches Gravitationsgesetz (3)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Auf einen künstlichen Satelliten S der vernachlässigbar kleinen Masse m auf einem stationären Orbit mit Radius r um den Planeten Erde wirkt die Gravitationskraft

$$F_G = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

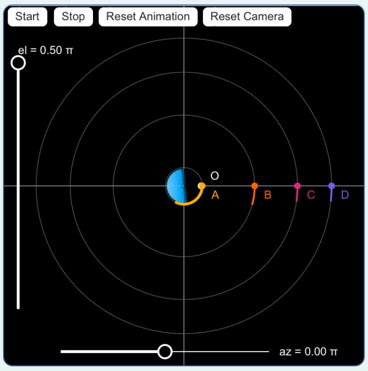
als Zentripetalkraft

$$F_p = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2\,r.$$

Dabei bezeichnen G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten Erde, v die Umlaufgeschwindigkeit von S auf dem Orbit und ω die zugehörige Winkelgeschwindigkeit. Untersuchen Sie im Folgenden den Orbit von S und entnehmen Sie die dazu erforderlichen Größen der folgenden Tabelle.

Name	Masse [kg]	siderischer Tag [h]	Äquatordurchmesser [km]
Merkur	$3.301 \cdot 10^{23}$	1407.5	4879.4
Venus	$4.8675 \cdot 10^{24}$	5832.5	12103.6
Erde	$5.9722 \cdot 10^{24}$	23.93	12756.3
Mars	$6.417 \cdot 10^{23}$	24.6	6792.4

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft vier Satelliten A, B, C und D (Punkte •, •, • und •) auf ihren konzentrischen äquatorialen Orbits um den Planeten Erde im Bezugssystem eines Beobachters O (Punkt) auf der Erdoberfläche. Der Satellit C befindet sich auf einem (geo)stationären Orbit und erscheint so dem Beobachter O am Himmel still zu stehen. Bitte beachten Sie, dass das Verhältnis von Erdradius, Bahnradius und Bahngeschwindigkeiten der Satelliten maßstabsgetreu abgebildet wird, die Abbildung abseits davon jedoch stark idealisiert ist.



(a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω von S und geben Sie diese in $\frac{1}{s}$ auf 4 signifikante Stellen genau an.

Es ist $\omega =$.

(b) Bestimmen Sie den Radius r des stationären Orbits von S mithilfe des klassischen Newtonschen Gravitationsgesetzes und geben Sie diesen in m auf 5 signifikante Stellen genau an. Die Masse von S sei dabei vernachlässigbar klein. Nehmen Sie für die Gravitationskonstante G an, dass $G = 6.6743 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ ist.

Es ist $r =$.

(c) Bestimmen Sie die Flughöhe h von S und geben Sie diese auf 5 signifikante Stellen genau an.

Es ist $h =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe des Kräftgleichgewichts $F_G = F_p$ (siehe Aufgabe 1.1.2.6) der Gravitationskraft F_G und der Zentripetalkraft F_p die Winkelgeschwindigkeit ω, der Bahnradius r und die Flughöhe h eines stationären Satelliten im Orbit eines Planeten bestimmt werden. Die Ergebnisse sollen dabei mit Einheiten bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten

Randomisierung	Der Planet, seine Masse, sein Durchmesser und die Länge eines siderischen Tages werden zufällig aus einer Liste von vier Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) ausgewählt.
Anpassungen	Die unter Randomisierung angegebene Liste kann um weitere Planten, ihre beschreibenden Größen samt signifikanter Stellen ergänzt werden.
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.4 Stefan-Boltzmann Gesetz (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe des Stefan-Boltzmann Gesetzes

$$P = \sigma A T^4$$

den Zusammenhang zwischen der Strahlungsleistung P, der Temperatur T und der Oberfläche A eines idealen schwarzen Körpers. Es bezeichne σ die Stefan-Boltzmann Konstante.

Berechnen Sie die Kantenlänge L eines idealen schwarzen Würfels, der bei einer absoluten Temperatur von $5.0 \cdot 10^1$ K eine Strahlungsleistung von $3.402 \cdot 10^3$ W aussendet, und geben Sie diese in m auf 2 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Stefan-Boltzmann σ Konstante gleich $5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^4\,\mathrm{m}^2}$ ist.

Es ist $L =$ ______.

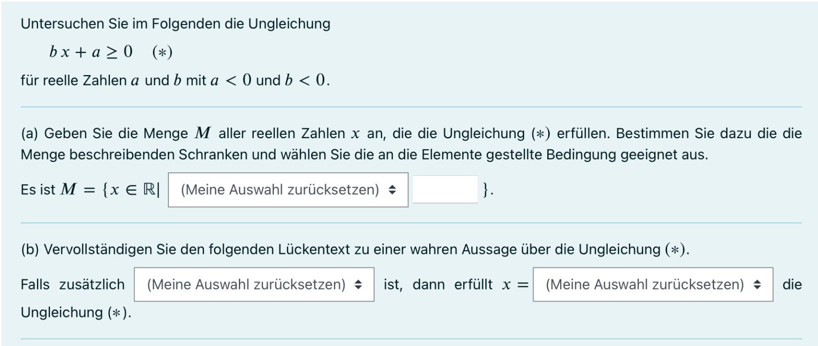
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe des Stefan-Boltzmann Gesetzes (siehe Aufgabe 1.1.2.7) die Kantenlänge L eines idealen schwarzen Würfels bei gegebener Strahlungsleistung P und Temperatur T berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten
Randomisierung	Die Strahlungsleistung und die Temperatur werden zufällig so bestimmt, dass die Kantenlänge L gleich 10 m, 20 m oder 40 m ist.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4 Unleichungen

1.1.4.1 Polynomiale Unleichungen (1) (linear)

Tags — Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Ungleichung

$$b\,x + a \geq 0 \quad (*)$$

für reelle Zahlen a und b mit $a < 0$ und $b < 0$.

(a) Geben Sie die Menge M aller reellen Zahlen x an, die die Ungleichung $(*)$ erfüllen. Bestimmen Sie dazu die die Menge beschreibenden Schranken und wählen Sie die an die Elemente gestellte Bedingung geeignet aus.

Es ist $M = \{x \in \mathbb{R}|$ (Meine Auswahl zurücksetzen) $\}$.

(b) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext zu einer wahren Aussage über die Ungleichung $(*)$.

Falls zusätzlich (Meine Auswahl zurücksetzen) ist, dann erfüllt $x =$ (Meine Auswahl zurücksetzen) die Ungleichung $(*)$.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$b\,x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,x + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse — Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung — Die Richtung der obigen Ungleichung und die Vorzeichen der Konstanten a und b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

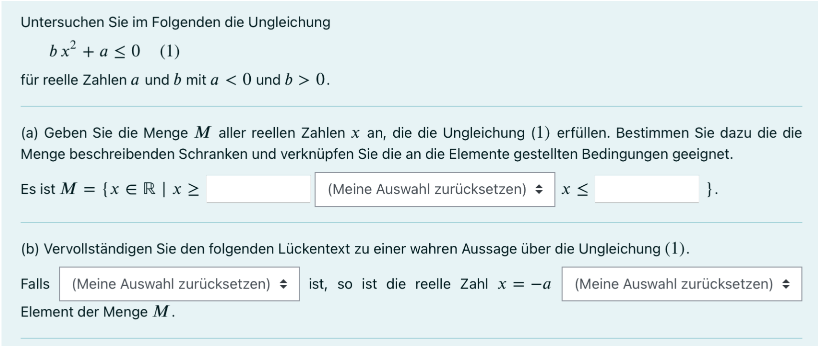
Anpassungen — keine

Verbotene Wörter — solveineq

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.2 Polynomiale Unleichungen (2) (quadratisch)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

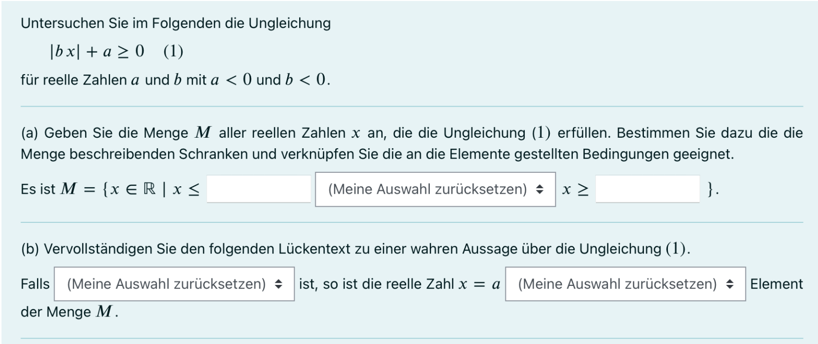


Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$b\,x^2 + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,x^2 + a \geq 0\,)$$ für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.3 Betragsungleichungen (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Ungleichung

$$|b\,x| + a \geq 0 \quad (1)$$

für reelle Zahlen a und b mit $a < 0$ und $b < 0$.

(a) Geben Sie die Menge M aller reellen Zahlen x an, die die Ungleichung (1) erfüllen. Bestimmen Sie dazu die die Menge beschreibenden Schranken und verknüpfen Sie die an die Elemente gestellten Bedingungen geeignet.

Es ist $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq$ [ ] (Meine Auswahl zurücksetzen) $x \geq$ [ ] $\}$.

(b) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext zu einer wahren Aussage über die Ungleichung (1).

Falls (Meine Auswahl zurücksetzen) ist, so ist die reelle Zahl $x = a$ (Meine Auswahl zurücksetzen) Element der Menge M.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$|b\,x| + a \leq 0 \quad (\text{oder } |b\,x| + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a < 0$ und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion

Randomisierung: Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Anpassungen: keine

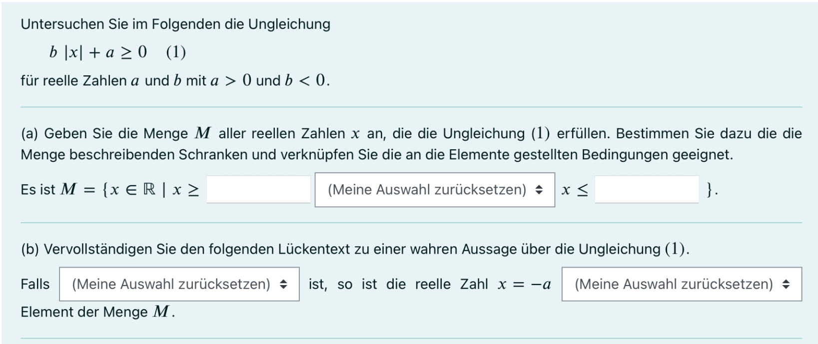
Verbotene Wörter: solveineq

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.4 Betragsungleichungen (2)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$b\,|x| + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,|x| + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und b mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion

Randomisierung: Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Anpassungen: keine

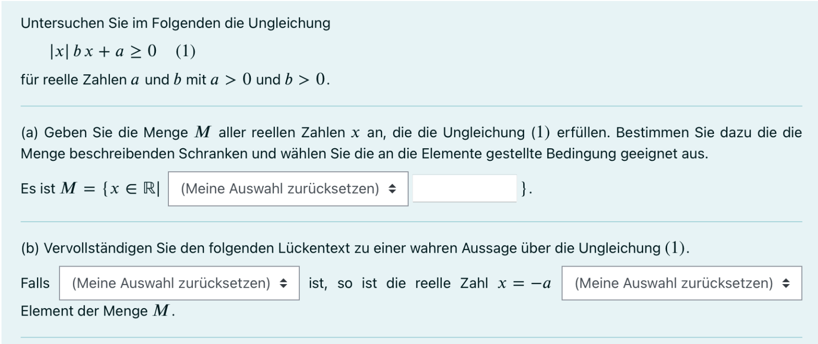
Verbotene Wörter: solveineq

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.5 Betragsungleichungen (3)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$b\,|x|\,x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,|x|\,x + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion

Randomisierung: Die Richtung der obigen Ungleichung und die Vorzeichen der Konstanten a und b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

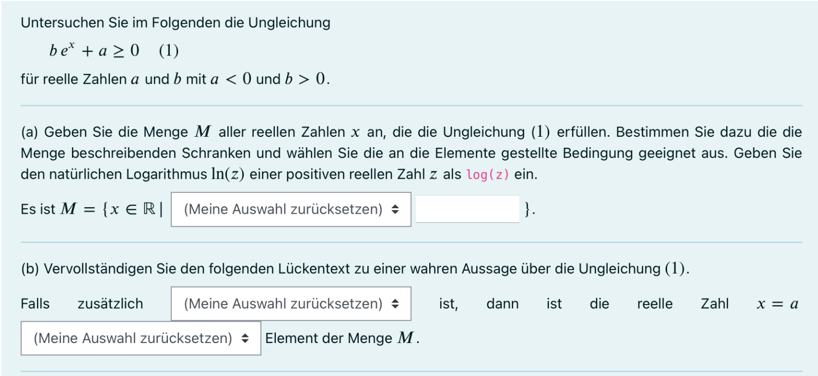
Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solveineq

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.6 Exponentielle Ungleichungen (1)

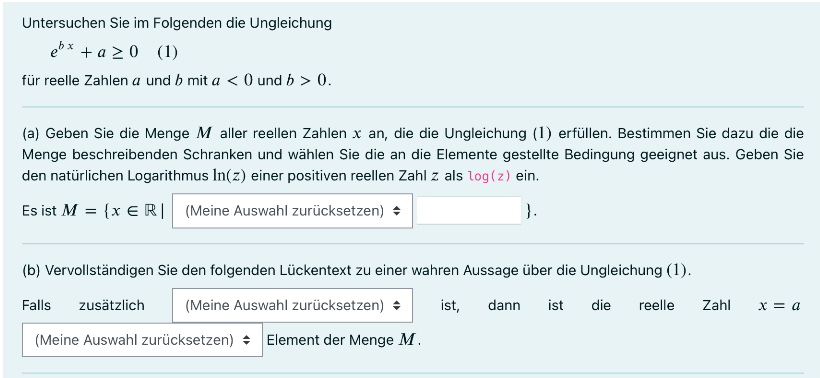
Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Exponentialfunktion
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$b\,e^x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,e^x + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Exponentialfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.7 Exponentielle Ungleichungen (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Exponentialfunktion
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Ungleichung

$e^{b\,x} + a \geq 0 \quad (1)$

für reelle Zahlen a und b mit $a < 0$ und $b > 0$.

(a) Geben Sie die Menge M aller reellen Zahlen x an, die die Ungleichung (1) erfüllen. Bestimmen Sie dazu die die Menge beschreibenden Schranken und wählen Sie die an die Elemente gestellte Bedingung geeignet aus. Geben Sie den natürlichen Logarithmus $\ln(z)$ einer positiven reellen Zahl z als `log(z)` ein.

Es ist $M = \{x \in \mathbb{R} \mid$ (Meine Auswahl zurücksetzen) $\}$.

(b) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext zu einer wahren Aussage über die Ungleichung (1).

Falls zusätzlich (Meine Auswahl zurücksetzen) ist, dann ist die reelle Zahl $x = a$ (Meine Auswahl zurücksetzen) Element der Menge M.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$e^{b\,x} + a \leq 0 \quad (\text{oder } e^{b\,x} + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a < 0$ und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Exponentialfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2 Rechenregeln

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen, die Partialbruchzerlegung und die Trigonometrie. Aufgaben zu den Potenz- und Logarithmusgesetzen behandeln die Vereinfachung komplexer Terme durch die Anwendung entsprechender Rechenregeln und die Angabe von Lösungsmengen. Aufgaben zur Trigonometrie umfassen die Lösung trigonometrischer Gleichungen sowie die Berechnung von Winkeln und Seiten in geometrischen Figuren und zeigen dabei praxisnahe Anwendungen der Trigonometrie auf. In weiteren Aufgaben wird die Partialbruchzerlegung eingeführt, die es ermöglicht, gebrochen-rationale Terme in einfache Bestandteile zu zerlegen.

Inhaltsverzeichnis

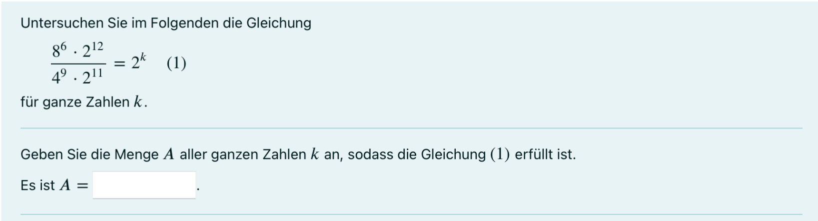
◀ ▲ ▶

1.2.1 Potenzgesetze

1.2.1.1 Potenzgesetze (1)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot (x^{m_2})^{k_2}}{(x^{m_3})^{k_3} \cdot (x^{m_4})^{k_4}} = x^k \tag{1.2.1}$$

erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basis x, die Exponenten $m_1, ..., m_4$ und die Exponenten $k_1, ..., k_4$ so ausgewählt, dass

- es genau eine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.1) erfüllt,
- die Basis x gleich 2, 3 oder 5 ist,
- genau zwei der Exponenten $m_1, ..., m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, ..., k_4$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.2 Potenzgesetze (2)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{5^k \cdot 9^{12}}{9^9 \cdot 25^7} = \frac{125^8 \cdot 3^k}{5^{a+14} \cdot 27^6} \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot y^k}{(x^{m_2})^{k_2} \cdot (x^{m_3})^{k_3}} = \frac{x^k \cdot (y^{m_5})^{k_5}}{(x^{m_4})^{k_4} \cdot (y^{m_6})^{k_6+a}} \tag{1.2.2}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basen x und y, die Exponenten $m_1, ..., m_6$ und die Exponenten $k_1, ..., k_6$ so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.2) erfüllt,
- die Basen x und y gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- genau zwei der Exponenten $m_1, ..., m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- einer der Exponenten m_5, m_6 gleich 2 und der andere Exponent gleich 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, ..., k_6$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

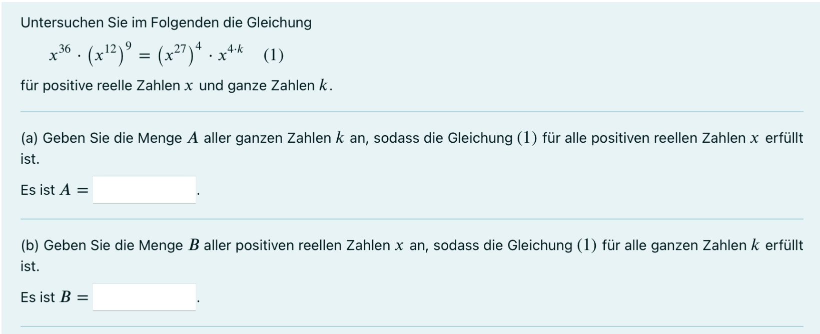
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.3 Potenzgesetze (3)

Tags — Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)



Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck}\,x^{-ca}\,x^{-abc}\,x^{abc}=1 \tag{1.2.3}$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse — Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung — Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren linksseitig oder rechtsseitig in Gleichung (1.2.3) ist randomisiert.

Anpassungen — keine

Verbotene Wörter — solve, find_root, algsys

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.4 Potenzgesetze (4)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{3\cdot k^2}}{x^{-24}} = x^{12\cdot k} \cdot x^{6\cdot k} \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k.

(a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$ ______.

(b) Geben Sie die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle ganzen Zahlen k erfüllt ist.

Es ist $B =$ ______.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\, x^{-cak}\, x^{-cbk}\, x^{abc} = 1 \tag{1.2.4}$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.4) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

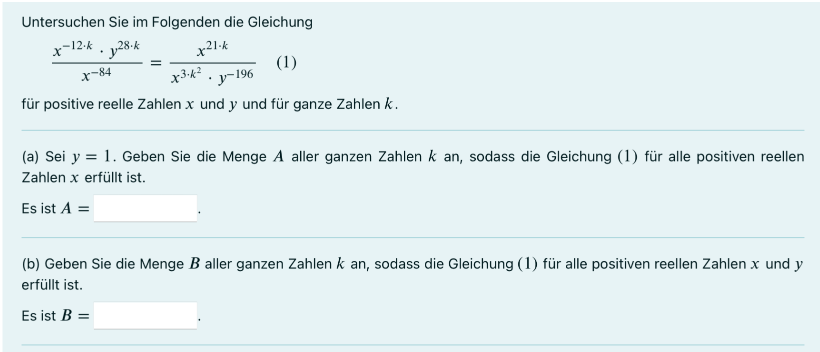
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.5 Potenzgesetze (5)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{-12\cdot k}\cdot y^{28\cdot k}}{x^{-84}}=\frac{x^{21\cdot k}}{x^{3\cdot k^2}\cdot y^{-196}} \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

(a) Sei $y=1$. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A=$.

(b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $B=$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\,x^{-cak}\,x^{-cbk}\,x^{abc}\,y^{abk}\,y^{-a^2b}=1 \tag{1.2.5}$$

für positive reelle Zahlen x und y und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten lassen sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ und $a\,b\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reelle Zahlen x und für $y=1$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.5) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.6 Potenzgesetze (6)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{-4\cdot k^2}\cdot y^{-6\cdot k^2}}{y^{-24\cdot k}\cdot z^{6\cdot k^2}} = \frac{z^{-24\cdot k}\cdot x^{-196}\cdot y^{6\cdot k^2}}{z^{-6\cdot k^2}\cdot (y\cdot z)^{42\cdot k}} \qquad (1)$$

für positive reelle Zahlen x, y und z und für ganze Zahlen k.

(a) Sei $z = \frac{1}{y}$ das multiplikative Inverse von y. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $A =$ ______ .

(b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllt ist.

Es ist $B =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ak^2}\,x^{-ac^2}\,(yz)^{bk^2}\,(yz)^{-abk}\,(yz)^{-bck}\,(yz)^{abc} = 1 \qquad (1.2.6)$$

für positive reelle Zahlen x, y und z und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten zu den Basen x und yz lassen sich zu $a\,(k-c)\,(k+c)$ bzw. $b\,(k-c)\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reelle Zahlen x, y und für $z = \frac{1}{y}$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.6) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2 Logarithmusgesetze

1.2.2.1 Logarithmusgesetze (1)

Tags
Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot
(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\log_3(2^k) - \log_3(4) + 3 \cdot \log_3(2) = \log_3(8) \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

Autor
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz
CC BY-SA 4.0

Thema
In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die die Gleichung der Form

$$\log_x(y^k) + b\,\log_x(y) = \log_x(y^a) + \log_x(y^b) \tag{1.2.7}$$

erfüllen. Der Vorfaktor von $\log_x(y)$ lässt sich zu $k - a$ vereinfachen.

Vorkenntnisse
Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung
Die Zahlen a und b werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 4 gewählt, sodass a und b verschieden sind . Die Basis x und Argument y werden zufällig als ganze Zahlen aus 2 und 3 gewählt, sodass x und y verschieden sind. Die Darstellung der Gleichung (1.2.7) ist so randomisiert, dass sich keine Summanden ohne Hilfe mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.7) ist randomisiert.

Anpassungen
keine

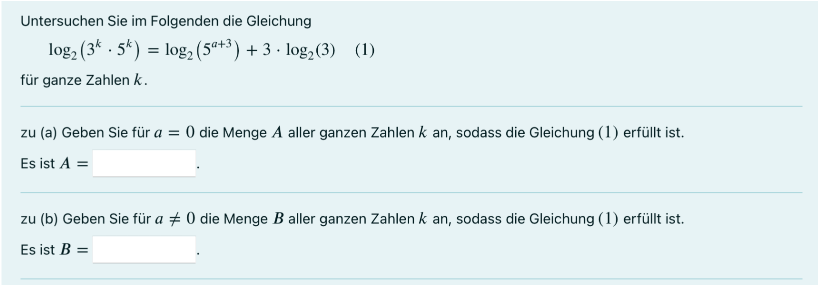
Verbotene Wörter
solve, find_root, algsys

Sonderoption
Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.2 Logarithmusgesetze (2)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\log_2(3^k \cdot 5^k) = \log_2(5^{a+3}) + 3 \cdot \log_2(3) \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\log_z((x\,y)^k) = b\,\log_z(x) + \log_z(y^{a+b}) \tag{1.2.8}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k - b$ bzw. $k - b + a$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Argumente x, y, die Basis z und der Exponent bzw. Vorfaktor b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.8) erfüllt,
- die Argumente x, y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- der Exponent bzw. Vorfaktoren b gleich 2, 3 oder 4 ist.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.8) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

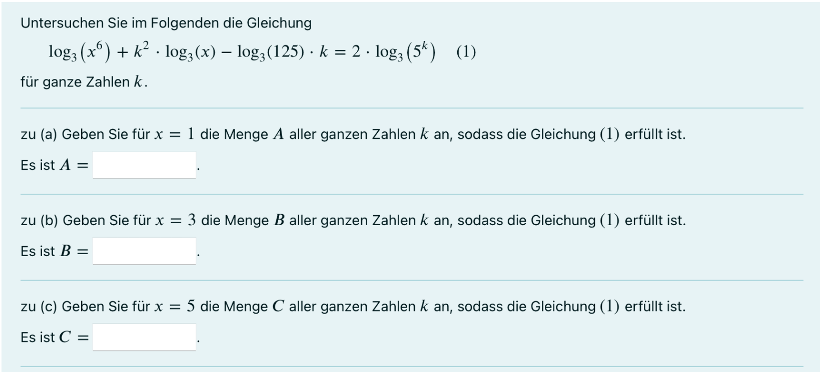
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.3 Logarithmusgesetze (3)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\log_3(x^6) + k^2 \cdot \log_3(x) - \log_3(125) \cdot k = 2 \cdot \log_3(5^k) \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $x = 1$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $x = 3$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie für $x = 5$ die Menge C aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$k^2 \log_z(x) + \log_z(x^{a\,b}) = k \log_z(y^a) + b \log_z(y^k) \tag{1.2.9}$$

unter den Bedingungen $x = 1$ in Aufgabenteil (a) $x = z$ in Aufgabenteil (b) und $x = y$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k^2 - ab$ bzw. $-k\,(a + b)$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Das Argumente y, die Basis z und die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $x = 0$ genau eine ganze Zahl k, es für $x = z$ keine ganze Zahl k gibt und es für $x = y$ genau zwei ganze Zahlen k, die die Gleichung (1.2.8) erfüllen,
- das Argument y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b gleich 2, 3 oder 4 und verschieden voneinander sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.9) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

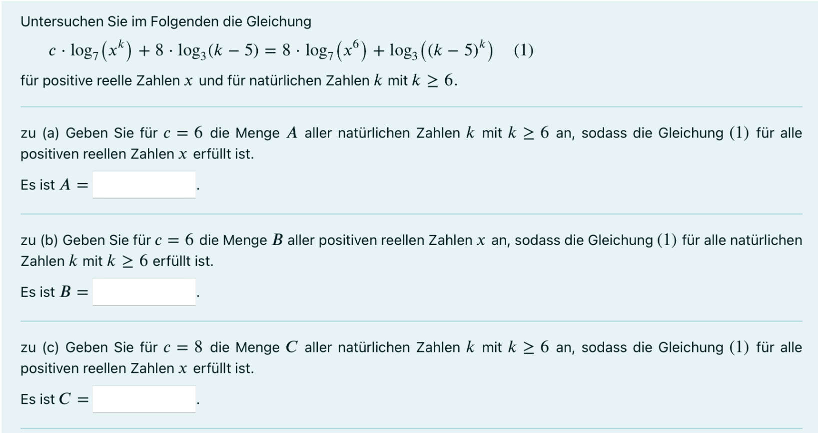
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.4 Logarithmusgesetze (4)

Tags	Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$c \cdot \log_7\left(x^k\right) + 8 \cdot \log_3(k-5) = 8 \cdot \log_7\left(x^6\right) + \log_3\left((k-5)^k\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und für natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$.

zu (a) Geben Sie für $c = 6$ die Menge A aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $c = 6$ die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie für $c = 8$ die Menge C aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze eine Gleichung der Form

$$c\,\log_z(x^k) + a\,\log_y(l) = a\,\log_z(x^b) + \log_y(l^k) \qquad (1.2.10)$$

mit $l = k - b + 1$ für positive reelle Zahlen x und für ganze Zahlen k untersucht werden. Es soll die Menge aller ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ angegeben werden, die für alle positiven reellen Zahlen x die Gleichung (1.2.10) unter den Bedingungen $c = b$ in Aufgabenteil (a) und $c = a$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen angegeben werden, die für alle ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ die Gleichung (1.2.10) unter der Bedingungen $c = b$ erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_y(l)$ lassen sich zu $ck - ab$ bzw. $-(k - a)$ vereinfachen.

Randomisierung: Die Basen y und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und die Exponenten a und b aus 4, 6, 8 und 10 mit $a > b$ ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) ist randomisiert.

Anpassungen: Die Randomisierung der Basen y und z, der Exponenten a und b und der Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) kann individuell gewählt werden.

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.5 Logarithmusgesetze (5)

Tags Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$-k \cdot \log_3\left(y^k\right) = \left(8 \cdot \log_3(5) - \log_3\left(5^k\right)\right) \cdot \log_5\left(x^5\right) - \log_3\left(y^{8\cdot k}\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x$ erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie die Menge C aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x^5$ erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die für alle positiven reellen Zahlen x und y eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} &\log_z(x^z)\,\log_w(z^k) + \log_w(y^{c\,k}) \\ &= c\,z\,\log_z(x)\,\log_w(z) + k\,\log_w(y^k) \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

ohne weitere Bedingung in Aufgabenteil (a), unter der Bedingung $y = x$ in Aufgabenteil (b) und unter der Bedingung $y = x^z$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $z\,(k-c)$ bzw. $k\,(k-c)$ vereinfachen.

Randomisierung Die Basen w und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und der Exponent c aus 4, 6 und 8 ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.11) ist randomisiert.

Anpassungen Die Randomisierung der Basen w und z, des Exponenten c und der Position der Summand in Gleichung (1.2.11) kann individuell gewählt werden.

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

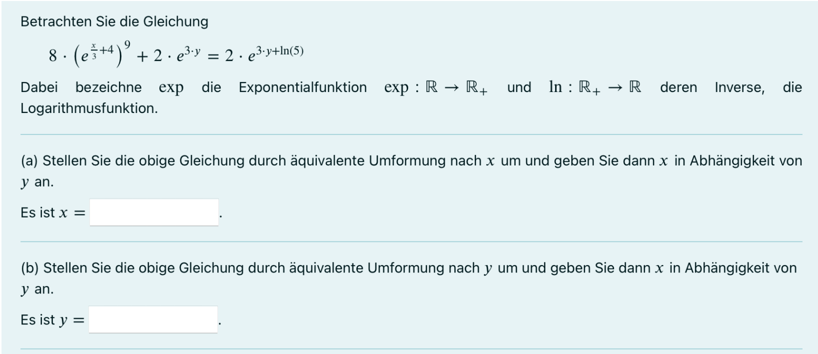
Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.6 Potenz- und Logarithmusgesetze

Tags Logarithmus, Exponentialfunktion, Logarithmusgesetze, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)


Betrachten Sie die Gleichung

$$8 \cdot \left(e^{\frac{x}{3}+4}\right)^9 + 2 \cdot e^{3 \cdot y} = 2 \cdot e^{3 \cdot y + \ln(5)}$$

Dabei bezeichne exp die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deren Inverse, die Logarithmusfunktion.

(a) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach x um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $x =$.

(b) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach y um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $y =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze und der Logarithmusgesetze die Gleichung

$$A \cdot e(N\,y) + B\,(e^{\frac{x}{C}+D})^E = A\,e^{N\,y+\ln(F)} \tag{1.2.12}$$

so äquivalent umgeformt werden, dass in Aufgabenteil (a) die Variable x in Abhängigkeit von y und in Aufgabenteil (b) die Variable y in Abhängigkeit von x angegeben werden können.

Randomisierung Die Parameter A, C, D, F und N werden als zufällig ganze Zahlen mit

$$A,\ N \in \{2,3\},\ C \in \{2,3,4,5,6\},\ D \in \{1,2,3,4\},\ F \in \{5,7,9\}$$

gewählt. Die Parameter M, B, E und G sind definiert durch

$$M = F-1, \quad B = M\,A, \quad E = M\,C, \quad G = C\,D.$$

Die Randomisierung erfolgt so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Potenz- und Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Darstellung der Terme auf der linken oder der rechten Seite von Gleichung 1.2.12 und die jeweilige Reihenfolge der Summanden ist randomisiert.

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.3 Trigonometrie

1.2.3.1 Trigonometrie und Dreiecke (1)

Tags	Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Ein rechtwinkliges Dreieck ABC sei mit folgenden Informationen gegeben: $a = 9$ cm, $b = 12.39$ cm, $c = 15.31$ cm und $\alpha = 44°$ im Punkt A. Entscheiden Sie, ob es solch ein Dreieck ABC geben kann. (Meine Auswahl zurücksetzen)
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und dem Winkel α im Punkt A gegeben. Es soll entschieden werden, ob solch ein Dreieck dann existieren kann.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen a, b, c und der Winkel α sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.2 Trigonometrie und Dreiecke (2)

Tags	Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024)

> Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen
>
> $b = 1$ cm, $c = 2$ cm
>
> und dem Winkel
>
> $\gamma = 90°$
>
> im Punkt C.
>
> ---
>
> Berechnen Sie den zugehörigen Winkel α im Punkt A. Geben Sie das Ergebnis als Gradmaß an und runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
>
> Es ist $\alpha \approx$ ____ °.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen b, c und dem rechten Winkel γ im Punkt C gegeben. Es soll der zugehörige Winkel α im Punkt A berechnet und auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen b und c sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.3 Sinusgleichung

Tags	Gleichung, Additionstheoreme, Sinus, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024)

Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x+\pi) - \sin(x) = 2.$$

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Geben Sie π gegebenenfalls als `%pi` ein.

Es ist $x =$

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Sinusgleichung $\sin(x+\pi) - \sin(x) = a$ mit $a \in [-2, 2]$ eindeutig für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gelöst werden.
Vorkenntnisse	Trigonometrie, Gleichungen lösen
Randomisierung	Der Parameter a ist als ganzzahliger Anteil von π randomisiert.
Anpassungen	Die Gleichung kann durch weitere trigonometrische Funktionen ergänzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.4 Satellitenempfang

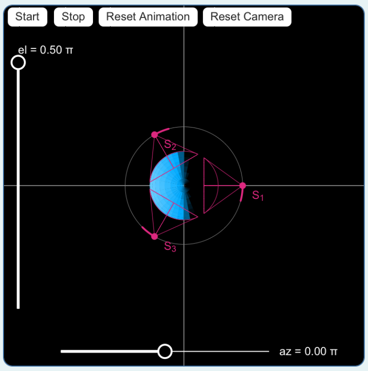
Tags Geometrie, Trigonometrie

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Seien $S_1, \dots, S_n$ künstliche Satelliten, die sich auf einem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit mit Bahnradius $r = 6752.6\,\mathrm{km}$ um den Planeten Venus befinden. Entnehmen Sie die zur weiteren Untersuchung erforderlichen Größen der folgenden Tabelle.

Name	Masse [kg]	siderischer Tag [h]	Äquatordurchmesser [km]
Merkur	$3.301 \cdot 10^{23}$	1407.5	4879.4
Venus	$4.8675 \cdot 10^{24}$	5832.5	12103.6
Erde	$5.9722 \cdot 10^{24}$	23.93	12756.3
Mars	$6.417 \cdot 10^{23}$	24.6	6792.4

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft $n = 3$ Satelliten S_1, S_2 und S_3 (Punkte •) auf ihrem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit um den Planeten Erde (blaue Kugel) im Bezugssystem eines Beobachters auf der Erdoberfläche.



Bestimmen Sie mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl n an Satelliten, sodass an jedem Punkt des Äquators mindestens ein Satellit am Himmel steht.

Es ist $n =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl an Satelliten auf einem gemeinsamen konzentrischen, äquatorialen Orbit um einen Planten bestimmt werden, sodass an jedem Punkt des Äquators des Planeten mindestens ein Satellit am Himmel steht.

Vorkenntnisse Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck, obere Gaußklammer

Randomisierung Der Planet und sein Durchmesser werden zufällig aus einer Liste von vier Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) ausgewählt. Der Bahnradius wird zufällig ausgewählt, sodass die minimal Anzahl der Satelliten eine Zahl zwischen 3 und 10 ist.

Anpassungen Die unter Randomisierung angegebene Liste kann um weitere Planeten und ihre beschreibenden Größen ergänzt werden.

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

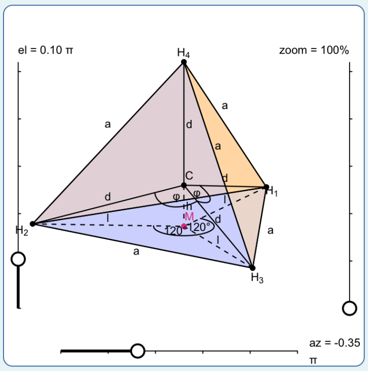
Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.5 Tetraeder

Tags	Geometrie, Trigonometrie, Tetraeder
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Durch die Punkte H_1, H_2, H_3 und H_4 sei ein regelmäßiges Tetraeder mit Kantenlänge a und Mittelpunkt C gegeben. Bestimmen Sie mithilfe der (ebenen) Geometrie den Tetraederwinkel φ, der gegeben ist als der Innenwinkel am Punkt C in dem durch H_1, H_2 und C bestimmten Dreieck. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt das oben beschriebene Tetraeder mit den in den weiteren Aufgabenteilen definierten Hilfslinien und -punkten.



(a) Der Schnittpunkt der Geraden durch H_4 und C mit der durch die Punkte H_1, H_2 und H_3 verlaufenden Ebene werde mit M bezeichnet. Sei l die Länge des von H_1 nach M verlaufenden Geradensegments. Bestimmen Sie l^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $l^2 =$ ______.

(b) Sei d die Länge des von C nach H_4 verlaufenden Geradensegments und sei h die Länge des von M nach C verlaufenden Geradensegments. Das von M nach H_4 verlaufende Geradensegment hat die Länge $H := d + h$. Bestimmen Sie H^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $H^2 =$ ______.

(c) Bestimmen Sie d in Abhängigkeit von a.

Es ist $d^2 =$ ______.

(d) Bestimmen Sie $\cos(\varphi)$ in Abhängigkeit von a.

Es ist $\cos(\varphi) =$ ______.

(e) Berechnen Sie φ Sie und geben Sie φ in Gradmaß bis auf 6 Nachkommastellen genau an.

Es ist $\varphi =$ ______°.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Eva Glasmachers
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie in mehreren Schritten der Winkel zwischen den Verbindungslinien der Ecken zum Mittelpunkt eines Tetraeders (verzerrter Winkel) bestimmt und in Gradmaß angegeben werden.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Anzahl der Nachkommastellen bei der Angabe des verzerrten Winkels im Tetraeder wird zufällig zwischen 4, 5 und 6 ausgewählt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.4 Partialbruchzerlegung

1.2.4.1 Partialbruchzerlegung (1)

Tags: Partialbruchzerlegung, PBZ.

Screenshot: (Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{-5}{x^2 - 4}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben A, B, C, $\ldots$ aus:

$R(x) =$ ____ .

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet ____ .

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 2. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.

Verbotene Wörter: partfrac.

Vorkenntnisse: Polynome und deren Nullstellen.

Randomisierung: Der Zähler und beide Nullstellen (voneinander abhängig) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung: Beide Nullstellen können unabhängig voneinander festgelegt werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.2 Partialbruchzerlegung (2)

Tags	Partialbruchzerlegung, PBZ.
Screenshot	(Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{x^2+x+4}{x^3+x^2+x+1}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in reelle Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ aus:

$R(x) =$ ________ .

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet ________ .

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Zählerpolynoms ist 2 und der des Nennerpolynoms 3. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (Linearfaktor, im Reellen nicht-zerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.
Verbotene Wörter	partfrac.
Vorkenntnisse	Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.
Randomisierung	Monom von Grad 0 des Zählerpolynoms wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die Nullstelle des Linearfaktors und der quadr. Term können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.3 Partialbruchzerlegung (3)

Tags	Partialbruchzerlegung, PBZ.
Screenshot	(Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2}{x^4 + 4\,x^3 + 8\,x^2 + 16\,x + 16}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in reelle Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ aus:

$R(x) =$ ______.

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 4. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (quadr. Linearfaktor, im Reellen nichtzerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.
Verbotene Wörter	partfrac.
Vorkenntnisse	Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.
Randomisierung	Der Zähler, die Nullstelle des Linearfaktors und das Monom von Grad 0 des quadr. Terms werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3 Zahlenräume

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Zahlenräumen und Darstellungsformen. Aufgaben zu komplexen Zahlen umfassen die Darstellung komplexer Zahlen und die Lösung von komplexen Gleichungen. Zusätzlich wird die Bedeutung der Zahlendarstellung in der Informatik thematisiert, einschließlich der Operationen auf Binärzahlen und der Umrechnung zwischen verschiedenen Zahlensystemen.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

1.3.1 Komplexe Zahlen

1.3.1.1 Real- und Imaginärteil (1)

Tags	Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Berechnen Sie zu den Zahlen

$$z_1 = 3\,\mathrm{i} + 5, \qquad z_2 = \frac{-6\,\mathrm{i} - 4}{2}, \qquad z_3 = 9\,\mathrm{i} + 2,$$

den Real- und Imaginärteil folgender Ausdrücke. Dabei bezeichne z^* die zu z komplex konjugierte Zahl. Verwenden Sie keine Dezimalzahldarstellung für Brüche.

(a) $z_A = {z_1}^3 - 3\,{z_1}^2 + 2\,z_1$,

(i) $\mathbf{Re}\left(z_A\right) =$ ______,

(ii) $\mathbf{Im}\left(z_A\right) =$ ______.

(b) $z_B = \dfrac{z_1\,z_3}{4\,z_2 - z_3}$,

(i) $\mathbf{Re}\left(z_B\right) =$ ______,

(ii) $\mathbf{Im}\left(z_B\right) =$ ______.

(c) $z_C = \dfrac{(z_3^*)^2}{2\,z_2 + 2\,z_1 + \mathrm{i}}$,

(i) $\mathbf{Re}\left(z_C\right) =$ ______,

(ii) $\mathbf{Im}\left(z_C\right) =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile von Kombinationen dieser Zahlen berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	realpart, imagpart, conjugate.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil.
Randomisierung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.2 Real- und Imaginärteil (2)

Tags: Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, hyperbolische Funktionen, Trigonometrie, Additionstheoreme.

Screenshot: (Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{\exp\left(\frac{-3\,\pi\,\mathrm{i}}{4}\right)}{\exp\left(\frac{3\,\pi\,\mathrm{i}}{2}\right)}, \quad z_2 = \cos(\exp(-2\,\mathrm{i})), \quad z_3 = \tan(3\,\mathrm{i}).$$

Drücken Sie in Aufgabe (b) und (c) die Lösung mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen aus:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `cos(x)` für den Cosinus, `sin(x)` für den Sinus, `cosh(x)` für den Cosinus hyperbolicus, `sinh(x)` für den Sinus hyperbolicus und `tanh(x)` für den Tangens hyperbolicus im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_1) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_1) =$ ______.

(b) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_2) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_2) =$ ______.

(c) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_3) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_3) =$ ______.

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile dieser Zahlen berechnet und angegeben. In Aufgabenteilen (b) und (c) sollen die Ergebnisse mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ausgedrückt werden.

Verbotene Wörter: realpart, imagpart.

Vorkenntnisse: Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, Additionstheoreme, hyperbolische Funktionen.

Randomisierung: Parameter in den Argumenten der verwendeten Funktionen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung: keine

Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.3 Real- und Imaginärteil (2) (ohne Hilfe)

Tags	Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, hyperbolische Funktionen, Trigonometrie, Additionstheoreme.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{\exp\left(\frac{3\,\pi\,i}{4}\right)}{\exp\left(\frac{\pi\,i}{2}\right)}, \quad z_2 = \cos(\exp(2\,i)), \quad z_3 = \tan(-4\,i).$$

Drücken Sie in Aufgabe (b) und (c) die Lösung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen und hyperbolischer Funktionen aus.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `cos(x)` für den Cosinus, `sin(x)` für den Sinus, `cosh(x)` für den Cosinus hyperbolicus, `sinh(x)` für den Sinus hyperbolicus und `tanh(x)` für den Tangens hyperbolicus im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_1) =$ ____,

(ii) $\mathrm{Im}(z_1) =$ ____.

(b) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_2) =$ ____,

(ii) $\mathrm{Im}(z_2) =$ ____.

(c) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_3) =$ ____,

(ii) $\mathrm{Im}(z_3) =$ ____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile dieser Zahlen berechnet und angegeben. In Aufgabenteilen (b) und (c) sollen die Ergebnisse mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ausgedrückt werden.
Verbotene Wörter	realpart, imagpart.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, Additionstheoreme, hyperbolische Funktionen.
Randomisierung	Parameter in den Argumenten der verwendeten Funktionen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.4 Komplexe Gleichung lösen

Tags — Komplexe Zahlen, Gleichung lösen.

Screenshot — (Stand 05.09.2024)

> Welche Zahl $z \in \mathbb{C}$ erfüllt die folgende Gleichung
>
> $$z - 1 + 3\mathrm{i}z^* - 4\mathrm{i} = 0\ ?$$
>
> Dabei bezeichne z^* die zu z komplex konjugierte Zahl. Geben Sie die Lösung in der kartesischen Darstellung an. Verwenden Sie `%i` für die imaginäre Einheit i und keine Dezimalzahldarstellung für Brüche.
>
> Es ist $z =$ ________ .

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Ziel ist es eine komplexe Zahl in kartesischer Darstellung zu finden, welche die gegebene Gleichung löst.
Verbotene Wörter	solve, expand, rectform.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil, lineare Gleichungssysteme.
Randomisierung	Drei Gleichungsparameter werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.5 Eulerdarstellung

Tags	Komplexe Zahlen, Eulerdarstellung.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Transformieren Sie die Zahlen $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ in die Euler-Darstelllung. Geben Sie hierbei die komplexe Phase ϕ im Intervall $[0,\ 2\pi[$ an.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `atan(x)` für den Arkustangens und `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) $z_1 = \dfrac{1}{2-5\,\mathrm{i}} = \boxed{}\ \exp\left\{i\left[\boxed{}\right]\right\}.$

(b) $z_2 = \dfrac{1}{5-\sqrt{3}\,\mathrm{i}} = \boxed{}\ \exp\left\{i\left[\boxed{}\right]\right\}.$

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a) und (b) werden die Beträge und die Phasen beider Zahlen berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	simplify, factor, expand, solve, polarform, rectform.
Vorkenntnisse	Polarkoordinaten.
Randomisierung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.6 Eulerdarstellung (reduziert)

Tags Komplexe Zahlen, Eulerdarstellung.

Screenshot (Stand 05.09.2024)

Transformieren Sie die Zahlen z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ in die Euler-Darstelllung. Geben Sie hierbei die komplexe Phase ϕ im Intervall $[0, 2\pi[$ an.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `%e` für die Eulerzahl e, `%i` für die imganinäre Einheit i, `atan(x)` für den Arkustangens und `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) $z_1 = \dfrac{1}{5\,\mathrm{i} + 2} =$ _____.

(b) $z_2 = \dfrac{1}{-\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 2} =$ _____.

Autor Michael Kubocz (RWTH)

Idee Michael Kubocz

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a) und (b) wird die Eulerdarstellung beider Zahlen berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter simplify, factor, expand, solve, polarform, rectform.

Vorkenntnisse Polarkoordinaten.

Randomisierung Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.

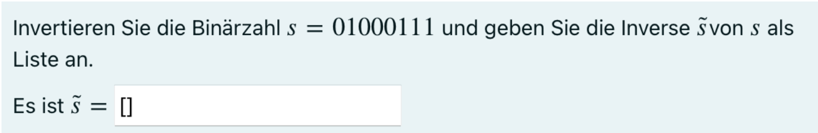
Sonderoption Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.7 Potenzen der Imaginären Einheit

Tags	Komplexe Zahlen, Potenz.
Screenshot	(Stand 05.09.2024) Berechnen Sie: $z = \mathbf{i}^{41} =$ [ ]. Verwenden Sie `%i` für die imaginäre Einheit **i**.
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Ziel ist es eine hohe Potenz der imaginären Einheit i zu vereinfachen.
Verbotene Wörter	ˆ.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil.
Randomisierung	Exponent wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.2 Zahlendarstellung in der Informatik

1.3.2.1 Invertieren von Binärzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll eine gegebene 8-Bit Binärzahl invertiert werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Konzept der Invertierung in der Binärdarstellung
Randomisierung	Die zu invertierende 8-Bit Binärzahl wird zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

1.3.2.2 Konvertieren von Binärzahlen zu Dezimalzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Konvertieren Sie die Binärzahl $s = 10001011$ in eine Dezimalzahl $\tilde{s}$. Gehen Sie davon aus, dass es sich um eine vorzeichenlose ganze Zahl handelt. Es ist $\tilde{s} =$.
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll eine gegebene 8-Bit Binärzahl in eine Dezimalzahl konvertiert werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Konvertierung von Binär zu Dezimal
Randomisierung	Die zu konvertierende 8-Bit Binärzahl wird zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

1.3.2.3 Addieren von zwei Binärzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Addieren Sie die Binärzahl $b_1 = 0100$ und $b_2 = 0100$. Gehen Sie davon aus, dass es sich um eine vorzeichenlose ganze Zahl handelt. Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an. $b_1 + b_2 =$
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen zwei gegebene 4-Bit Binärzahlen addiert und das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Addition von Binärzahlen, Konvertierung von Binär zu Dezimal
Randomisierung	Die beiden zu addierenden 4-Bit Binärzahlen werden zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein