1.2 Rechenregeln

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen, die Partialbruchzerlegung und die Trigonometrie. Aufgaben zu den Potenz- und Logarithmusgesetzen behandeln die Vereinfachung komplexer Terme durch die Anwendung entsprechender Rechenregeln und die Angabe von Lösungsmengen. Aufgaben zur Trigonometrie umfassen die Lösung trigonometrischer Gleichungen sowie die Berechnung von Winkeln und Seiten in geometrischen Figuren und zeigen dabei praxisnahe Anwendungen der Trigonometrie auf. In weiteren Aufgaben wird die Partialbruchzerlegung eingeführt, die es ermöglicht, gebrochen-rationale Terme in einfache Bestandteile zu zerlegen.

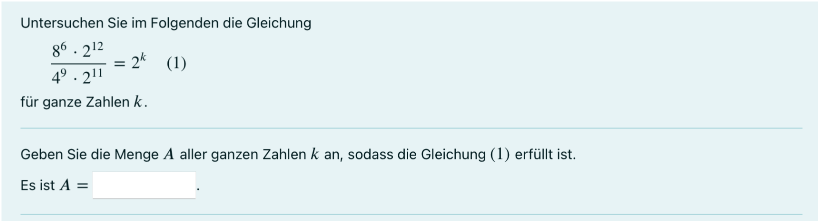
Inhaltsverzeichnis

1.2.1 Potenzgesetze

1.2.1.1 Potenzgesetze (1)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{8^6 \cdot 2^{12}}{4^9 \cdot 2^{11}} = 2^k \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot (x^{m_2})^{k_2}}{(x^{m_3})^{k_3} \cdot (x^{m_4})^{k_4}} = x^k \tag{1.2.1}$$

erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basis x, die Exponenten $m_1, ..., m_4$ und die Exponenten $k_1, ..., k_4$ so ausgewählt, dass

- es genau eine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.1) erfüllt,
- die Basis x gleich 2, 3 oder 5 ist,
- genau zwei der Exponenten $m_1, ..., m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, ..., k_4$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

Anpassungen: keine

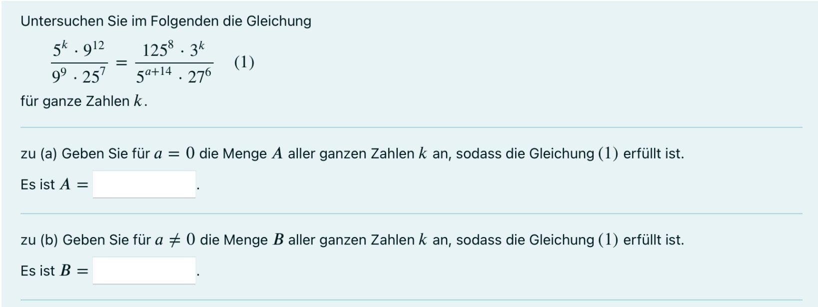
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.2 Potenzgesetze (2)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{5^k \cdot 9^{12}}{9^9 \cdot 25^7} = \frac{125^8 \cdot 3^k}{5^{a+14} \cdot 27^6} \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot y^k}{(x^{m_2})^{k_2} \cdot (x^{m_3})^{k_3}} = \frac{x^k \cdot (y^{m_5})^{k_5}}{(x^{m_4})^{k_4} \cdot (y^{m_6})^{k_6+a}} \tag{1.2.2}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basen x und y, die Exponenten $m_1, \ldots, m_6$ und die Exponenten $k_1, \ldots, k_6$ so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.2) erfüllt,
- die Basen x und y gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- genau zwei der Exponenten $m_1, \ldots, m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- einer der Exponenten m_5, m_6 gleich 2 und der andere Exponent gleich 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, \ldots, k_6$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.3 Potenzgesetze (3)

Tags — Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$x^{36} \cdot \left(x^{12}\right)^9 = \left(x^{27}\right)^4 \cdot x^{4 \cdot k} \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k.

(a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$ ______ .

(b) Geben Sie die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle ganzen Zahlen k erfüllt ist.

Es ist $B =$ ______ .

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck}\, x^{-ca}\, x^{-abc}\, x^{abc} = 1 \tag{1.2.3}$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse — Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung — Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren linksseitig oder rechtsseitig in Gleichung (1.2.3) ist randomisiert.

Anpassungen — keine

Verbotene Wörter — solve, find_root, algsys

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.4 Potenzgesetze (4)

Tags Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{3\cdot k^2}}{x^{-24}} = x^{12\cdot k} \cdot x^{6\cdot k} \qquad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k.

(a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$ ______.

(b) Geben Sie die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle ganzen Zahlen k erfüllt ist.

Es ist $B =$ ______.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\, x^{-cak}\, x^{-cbk}\, x^{abc} = 1 \tag{1.2.4}$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.4) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.5 Potenzgesetze (5)

Tags	Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{-12\cdot k}\cdot y^{28\cdot k}}{x^{-84}} = \frac{x^{21\cdot k}}{x^{3\cdot k^2}\cdot y^{-196}} \qquad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

(a) Sei $y = 1$. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

(b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\, x^{-cak}\, x^{-cbk}\, x^{abc}\, y^{abk}\, y^{-a^2 b} = 1 \qquad (1.2.5)$$

für positive reelle Zahlen x und y und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten lassen sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ und $a\,b\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reelle Zahlen x und für $y = 1$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.5) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.6 Potenzgesetze (6)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{-4\cdot k^2}\cdot y^{-6\cdot k^2}}{y^{-24\cdot k}\cdot z^{6\cdot k^2}}=\frac{z^{-24\cdot k}\cdot x^{-196}\cdot y^{6\cdot k^2}}{z^{-6\cdot k^2}\cdot (y\cdot z)^{42\cdot k}} \qquad (1)$$

für positive reelle Zahlen x, y und z und für ganze Zahlen k.

(a) Sei $z=\frac{1}{y}$ das multiplikative Inverse von y. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $A=$ _____.

(b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllt ist.

Es ist $B=$ _____.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ak^2}\,x^{-ac^2}\,(yz)^{bk^2}\,(yz)^{-abk}\,(yz)^{-bck}\,(yz)^{abc}=1 \qquad (1.2.6)$$

für positive reelle Zahlen x, y und z und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten zu den Basen x und yz lassen sich zu $a\,(k-c)\,(k+c)$ bzw. $b\,(k-c)\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reelle Zahlen x, y und für $z=\frac{1}{y}$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.6) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2 Logarithmusgesetze

1.2.2.1 Logarithmusgesetze (1)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

> Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung
>
> $\log_3(2^k) - \log_3(4) + 3 \cdot \log_3(2) = \log_3(8) \quad (1)$
>
> für ganze Zahlen k.
>
> Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.
>
> Es ist $A =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die die Gleichung der Form

$$\log_x(y^k) + b \log_x(y) = \log_x(y^a) + \log_x(y^b) \tag{1.2.7}$$

erfüllen. Der Vorfaktor von $\log_x(y)$ lässt sich zu $k - a$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a und b werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 4 gewählt, sodass a und b verschieden sind . Die Basis x und Argument y werden zufällig als ganze Zahlen aus 2 und 3 gewählt, sodass x und y verschieden sind. Die Darstellung der Gleichung (1.2.7) ist so randomisiert, dass sich keine Summanden ohne Hilfe mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.7) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.2 Logarithmusgesetze (2)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\log_2\left(3^k \cdot 5^k\right) = \log_2\left(5^{a+3}\right) + 3 \cdot \log_2(3) \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\log_z((x\,y)^k) = b\,\log_z(x) + \log_z(y^{a+b}) \tag{1.2.8}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k - b$ bzw. $k - b + a$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Argumente x, y, die Basis z und der Exponent bzw. Vorfaktor b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.8) erfüllt,
- die Argumente x, y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- der Exponent bzw. Vorfaktoren b gleich 2, 3 oder 4 ist.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.8) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

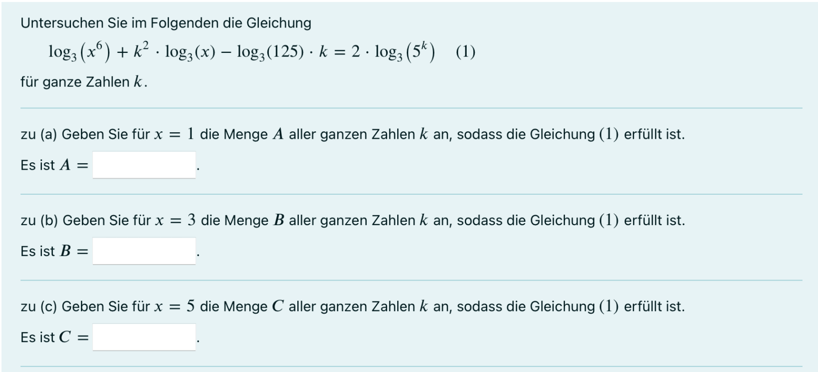
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.3 Logarithmusgesetze (3)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\log_3\left(x^6\right) + k^2 \cdot \log_3(x) - \log_3(125) \cdot k = 2 \cdot \log_3\left(5^k\right) \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $x = 1$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $x = 3$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie für $x = 5$ die Menge C aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$k^2 \log_z(x) + \log_z(x^{a\,b}) = k \log_z(y^a) + b \log_z(y^k) \tag{1.2.9}$$

unter den Bedingungen $x = 1$ in Aufgabenteil (a) $x = z$ in Aufgabenteil (b) und $x = y$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k^2 - ab$ bzw. $-k\,(a+b)$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Das Argumente y, die Basis z und die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $x = 0$ genau eine ganze Zahl k, es für $x = z$ keine ganze Zahl k gibt und es für $x = y$ genau zwei ganze Zahlen k, die die Gleichung (1.2.8) erfüllen,
- das Argument y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b gleich 2, 3 oder 4 und verschieden voneinander sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.9) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

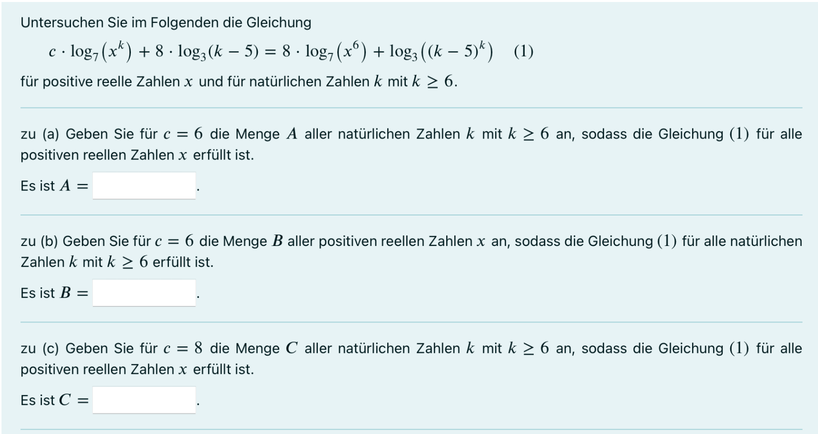
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.4 Logarithmusgesetze (4)

Tags Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$c \cdot \log_7\left(x^k\right) + 8 \cdot \log_3(k-5) = 8 \cdot \log_7\left(x^6\right) + \log_3\left((k-5)^k\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und für natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$.

zu (a) Geben Sie für $c = 6$ die Menge A aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $c = 6$ die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie für $c = 8$ die Menge C aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze eine Gleichung der Form

$$c \log_z(x^k) + a \log_y(l) = a \log_z(x^b) + \log_y(l^k) \qquad (1.2.10)$$

mit $l = k - b + 1$ für positive reelle Zahlen x und für ganze Zahlen k untersucht werden. Es soll die Menge aller ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ angegeben werden, die für alle positiven reellen Zahlen x die Gleichung (1.2.10) unter den Bedingungen $c = b$ in Aufgabenteil (a) und $c = a$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen angegeben werden, die für alle ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ die Gleichung (1.2.10) unter der Bedingungen $c = b$ erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_y(l)$ lassen sich zu $ck - ab$ bzw. $-(k - a)$ vereinfachen.

Randomisierung Die Basen y und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und die Exponenten a und b aus 4, 6, 8 und 10 mit $a > b$ ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) ist randomisiert.

Anpassungen Die Randomisierung der Basen y und z, der Exponenten a und b und der Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) kann individuell gewählt werden.

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.5 Logarithmusgesetze (5)

Tags	Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$-k \cdot \log_3\left(y^k\right) = \left(8 \cdot \log_3(5) - \log_3\left(5^k\right)\right) \cdot \log_5\left(x^5\right) - \log_3\left(y^{8 \cdot k}\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

---

zu (a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $A =$ ____.

---

zu (b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x$ erfüllt ist.

Es ist $B =$ ____.

---

zu (c) Geben Sie die Menge C aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x^5$ erfüllt ist.

Es ist $C =$ ____.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die für alle positiven reellen Zahlen x und y eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} &\log_z(x^z)\,\log_w(z^k) + \log_w(y^{c\,k}) \\ &= c\,z\,\log_z(x)\,\log_w(z) + k\,\log_w(y^k) \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

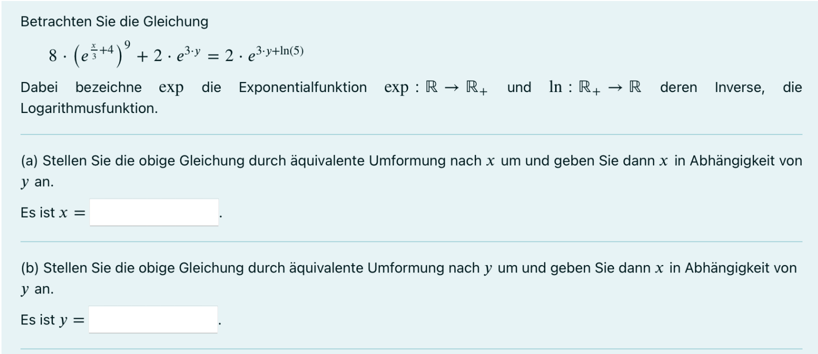
ohne weitere Bedingung in Aufgabenteil (a), unter der Bedingung $y = x$ in Aufgabenteil (b) und unter der Bedingung $y = x^z$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $z\,(k-c)$ bzw. $k\,(k-c)$ vereinfachen.

Randomisierung	Die Basen w und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und der Exponent c aus 4, 6 und 8 ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.11) ist randomisiert.
Anpassungen	Die Randomisierung der Basen w und z, des Exponenten c und der Position der Summand in Gleichung (1.2.11) kann individuell gewählt werden.
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.6 Potenz- und Logarithmusgesetze

Tags: Logarithmus, Exponentialfunktion, Logarithmusgesetze, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Betrachten Sie die Gleichung

$$8 \cdot \left(e^{\frac{x}{3}+4}\right)^9 + 2 \cdot e^{3 \cdot y} = 2 \cdot e^{3 \cdot y + \ln(5)}$$

Dabei bezeichne $\exp$ die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deren Inverse, die Logarithmusfunktion.

(a) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach x um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $x =$.

(b) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach y um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $y =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze und der Logarithmusgesetze die Gleichung

$$A \cdot e(N\,y) + B\,(e^{\frac{x}{C}+D})^E = A\,e^{N\,y+\ln(F)} \tag{1.2.12}$$

so äquivalent umgeformt werden, dass in Aufgabenteil (a) die Variable x in Abhängigkeit von y und in Aufgabenteil (b) die Variable y in Abhängigkeit von x angegeben werden können.

Randomisierung: Die Parameter A, C, D, F und N werden als zufällig ganze Zahlen mit

$$A,\ N \in \{2,3\},\ C \in \{2,3,4,5,6\},\ D \in \{1,2,3,4\},\ F \in \{5,7,9\}$$

gewählt. Die Parameter M, B, E und G sind definiert durch

$$M = F - 1, \quad B = M\,A, \quad E = M\,C, \quad G = C\,D.$$

Die Randomisierung erfolgt so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Potenz- und Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Darstellung der Terme auf der linken oder der rechten Seite von Gleichung 1.2.12 und die jeweilige Reihenfolge der Summanden ist randomisiert.

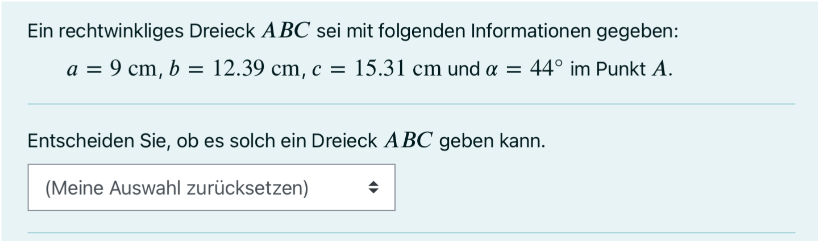
Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.3 Trigonometrie

1.2.3.1 Trigonometrie und Dreiecke (1)

Tags	Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024) 
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und dem Winkel α im Punkt A gegeben. Es soll entschieden werden, ob solch ein Dreieck dann existieren kann.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen a, b, c und der Winkel α sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.2 Trigonometrie und Dreiecke (2)

Tags	Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $b = 1$ cm, $c = 2$ cm und dem Winkel $\gamma = 90°$ im Punkt C. Berechnen Sie den zugehörigen Winkel α im Punkt A. Geben Sie das Ergebnis als Gradmaß an und runden Sie auf zwei Nachkommastellen. Es ist $\alpha \approx$ °.
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen b, c und dem rechten Winkel γ im Punkt C gegeben. Es soll der zugehörige Winkel α im Punkt A berechnet und auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen b und c sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.3 Sinusgleichung

Tags	Gleichung, Additionstheoreme, Sinus, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024)

Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x+\pi) - \sin(x) = 2.$$

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Geben Sie π gegebenenfalls als `%pi` ein.

Es ist $x =$

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Sinusgleichung $\sin(x+\pi) - \sin(x) = a$ mit $a \in [-2, 2]$ eindeutig für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gelöst werden.
Vorkenntnisse	Trigonometrie, Gleichungen lösen
Randomisierung	Der Parameter a ist als ganzzahliger Anteil von π randomisiert.
Anpassungen	Die Gleichung kann durch weitere trigonometrische Funktionen ergänzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

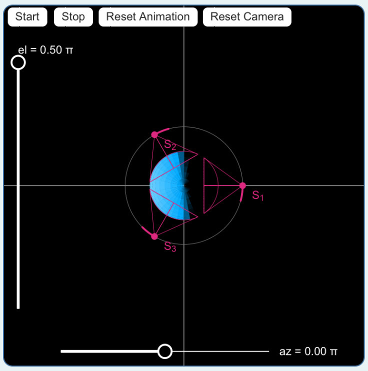
1.2.3.4 Satellitenempfang

Tags	Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Seien $S_1, \ldots, S_n$ künstliche Satelliten, die sich auf einem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit mit Bahnradius $r = 6752.6\,\mathrm{km}$ um den Planeten Venus befinden. Entnehmen Sie die zur weiteren Untersuchung erforderlichen Größen der folgenden Tabelle.

Name	Masse [kg]	siderischer Tag [h]	Äquatordurchmesser [km]
Merkur	$3.301 \cdot 10^{23}$	1407.5	4879.4
Venus	$4.8675 \cdot 10^{24}$	5832.5	12103.6
Erde	$5.9722 \cdot 10^{24}$	23.93	12756.3
Mars	$6.417 \cdot 10^{23}$	24.6	6792.4

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft $n = 3$ Satelliten S_1, S_2 und S_3 (Punkte •) auf ihrem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit um den Planeten Erde (blaue Kugel) im Bezugssystem eines Beobachters auf der Erdoberfläche.



Bestimmen Sie mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl n an Satelliten, sodass an jedem Punkt des Äquators mindestens ein Satellit am Himmel steht.

Es ist $n =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl an Satelliten auf einem gemeinsamen konzentrischen, äquatorialen Orbit um einen Planten bestimmt werden, sodass an jedem Punkt des Äquators des Planeten mindestens ein Satellit am Himmel steht.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck, obere Gaußklammer
Randomisierung	Der Planet und sein Durchmesser werden zufällig aus einer Liste von vier Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) ausgewählt. Der Bahnradius wird zufällig ausgewählt, sodass die minimal Anzahl der Satelliten eine Zahl zwischen 3 und 10 ist.
Anpassungen	Die unter Randomisierung angegebene Liste kann um weitere Planeten und ihre beschreibenden Größen ergänzt werden.
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

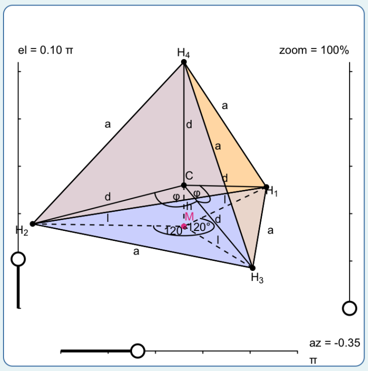
1.2.3.5 Tetraeder

Tags Geometrie, Trigonometrie, Tetraeder

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Durch die Punkte H_1, H_2, H_3 und H_4 sei ein regelmäßiges Tetraeder mit Kantenlänge a und Mittelpunkt C gegeben. Bestimmen Sie mithilfe der (ebenen) Geometrie den Tetraederwinkel φ, der gegeben ist als der Innenwinkel am Punkt C in dem durch H_1, H_2 und C bestimmten Dreieck. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt das oben beschriebene Tetraeder mit den in den weiteren Aufgabenteilen definierten Hilfslinien und -punkten.



(a) Der Schnittpunkt der Geraden durch H_4 und C mit der durch die Punkte H_1, H_2 und H_3 verlaufenden Ebene werde mit M bezeichnet. Sei l die Länge des von H_1 nach M verlaufenden Geradensegments. Bestimmen Sie l^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $l^2 =$ ______.

(b) Sei d die Länge des von C nach H_4 verlaufenden Geradensegments und sei h die Länge des von M nach C verlaufenden Geradensegments. Das von M nach H_4 verlaufende Geradensegment hat die Länge $H := d + h$. Bestimmen Sie H^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $H^2 =$ ______.

(c) Bestimmen Sie d in Abhängigkeit von a.

Es ist $d^2 =$ ______.

(d) Bestimmen Sie $\cos(\varphi)$ in Abhängigkeit von a.

Es ist $\cos(\varphi) =$ ______.

(e) Berechnen Sie φ Sie und geben Sie φ in Gradmaß bis auf 6 Nachkommastellen genau an.

Es ist $\varphi =$ ______°.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Eva Glasmachers

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie in mehreren Schritten der Winkel zwischen den Verbindungslinien der Ecken zum Mittelpunkt eines Tetraeders (verzerrter Winkel) bestimmt und in Gradmaß angegeben werden.

Vorkenntnisse Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck

Randomisierung Die Anzahl der Nachkommastellen bei der Angabe des verzerrten Winkels im Tetraeder wird zufällig zwischen 4, 5 und 6 ausgewählt.

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.2.4 Partialbruchzerlegung

1.2.4.1 Partialbruchzerlegung (1)

Tags	Partialbruchzerlegung, PBZ.
Screenshot	(Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{-5}{x^2 - 4}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben A, B, C, $\ldots$ aus:

$R(x) =$ __________.

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet __________.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 2. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.
Verbotene Wörter	partfrac.
Vorkenntnisse	Polynome und deren Nullstellen.
Randomisierung	Der Zähler und beide Nullstellen (voneinander abhängig) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Beide Nullstellen können unabhängig voneinander festgelegt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.2 Partialbruchzerlegung (2)

Tags: Partialbruchzerlegung, PBZ.

Screenshot: (Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in reelle Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben $A, B, C, \ldots$ aus:

$R(x) =$ ______.

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet ______.

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Zählerpolynoms ist 2 und der des Nennerpolynoms 3. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (Linearfaktor, im Reellen nichtzerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.

Verbotene Wörter: partfrac.

Vorkenntnisse: Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.

Randomisierung: Monom von Grad 0 des Zählerpolynoms wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung: Die Nullstelle des Linearfaktors und der quadr. Term können angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.3 Partialbruchzerlegung (3)

Tags: Partialbruchzerlegung, PBZ.

Screenshot: (Stand 31.08.2024)

> Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion
>
> $$R:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{2}{x^4+4\,x^3+8\,x^2+16\,x+16}.$$
>
> (a) Zerlegen Sie $R(x)$ in reelle Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben $A,\ B,\ C,\ \ldots$ aus:
>
> $R(x) =$ ______ .
>
> (b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.
>
> Die Liste lautet ______ .

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 4. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (quadr. Linearfaktor, im Reellen nichtzerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.

Verbotene Wörter: partfrac.

Vorkenntnisse: Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.

Randomisierung: Der Zähler, die Nullstelle des Linearfaktors und das Monom von Grad 0 des quadr. Terms werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung: Keine.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja.